

Semidefinite Programming を用いた伝送路のブラインド推定手法の研究

研究代表者 小西克巳 工学院大学 情報学部 准教授

1 はじめに

本研究では、ブラインド等化手法の一つである分数間隔等化手法 (fractionally spaced equalization, FSE) における伝送路のブラインド推定手法の研究を行った。分数間隔等化手法では、受信信号の SNR が十分に確保されている場合には、有限長のインパルス応答を持つ等化器により完全な等化が実現できるという特徴を持ち、分数間隔等化を利用した様々な手法が提案されている。本研究では、分数間隔等化に基づくブラインド等化手法のうち数理計画法に基づく手法に注目し研究を進めた。ある制約条件の下で受信信号により定義される目的関数を最小化（最大化）することにより、等化器のインパルス応答を求める手法である。文献[4]では、等化器のインパルス応答を求める問題が線形計画問題として定式化され、ノイズフリーの場合には完全な等化が実現されることが示されている。文献[3]では非凸2次計画問題として定式化され、局所最適解を求める手法を提案するとともに、求められた局所最適解から得られる等化器のインパルス応答を用いることで、ノイズフリーの場合に完全な等化が実現されることが示されている。このような数理計画法に基づく数値計算を利用した信号処理は計算機性能の向上により注目されており、近年では信号処理のための実時間計算に関する研究も進められている[5]。そこで本研究でも、数理計画法を利用したブラインド等化手法に注目する。数理計画法に基づく分数間隔ブラインド等化手法では、等化器のインパルス応答長が必要以上に長い場合、ノイズの影響により等化性能が低下する。これは、インパルス応答が長い場合には数理計画問題の解の自由度が増加し、これによりノイズの影響を受けやすくなるためである。本研究では、解の自由度の増加を防ぐ手法として L1 ノルム最小化に基づく手法と行列のランク最小化に基づく手法を提案する。解の自由度を減らすには、解となるベクトルに何らかの制約を与えれば良い。そこで制約を与える方法として、スパースベクトルであるという制約と、ベクトルから作成される行列のランクが小さいという制約を与える2種類の手法を提案している。スパースベクトルとは、成分の多くが 0 であるようなベクトルである。適切な成分のみ値を持ち、他の成分が 0 であるような解を求めることで解の自由度を減らし、ノイズに対しロバストで精度の良い等化を実現する手法である。また同様に、行列のランクを最小にすることで解の自由度を減らし、精度の良い等化を実現する。スパースベクトルを求める問題は L0 ノルム最小化問題として定式化されるが、この問題は組合せ的な困難を含み、簡単に解くことはできない。これに対し、L1 ノルム最小化問題は、L0 ノルム最小化問題の良い近似解を与える方法として古くから知られており[6]–[10]、信号処理の分野でも様々な応用が提案されている[11]–[14]。近年では、L1 ノルム最小化問題は Compressive Sensing の分野でも注目されている[15]–[17]。また、ランク最小化も Semidefinite Programming (SDP, 半正定値計画)として定式化されることが知られており、SDP を利用した手法を提案する。

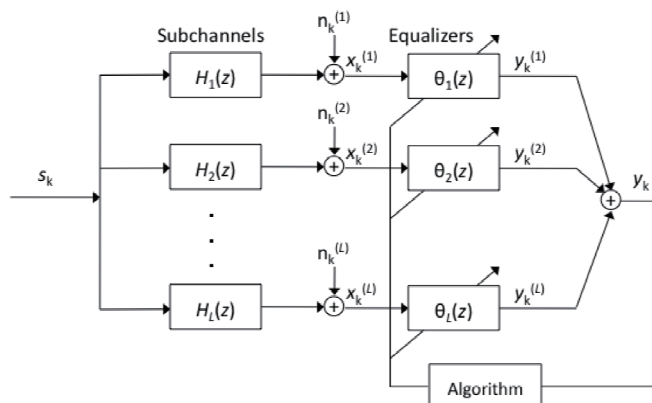


図1 Fractionally spaced blind equalization system.

2 ブラインド等化

2-1 分数間隔等化

本研究では、以下の式で表されるような線形時不変システムを扱う。

$$\mathbf{x}(t) = \sum_m s_m \mathbf{h}(t - mT) + \mathbf{n}(t), \quad (1)$$

ただし、 $x(t)$ は受信信号、 s_m は送信信号、 T はシンボル周期、 $h(k)$ は複素インパルス応答、 $n(t)$ は送信信号 s_m とは独立した加法性複素雑音を表し、送信信号は直交振幅変調 (QAM) とする。分数間隔等化を行うため、受信信号が元のサンプリング周波数の L 倍でオーバーサンプリングされるとすると、通信路は L 個のサブチャネル応答とサブチャネル雑音として表現され、 l 番目のチャネルは以下のように表される。

$$\mathbf{x}_k^{(l)} = \sum_{m=0}^K s_{k-m} \mathbf{h}_m^{(l)} + \mathbf{n}_k^{(l)}, \quad (2)$$

ただし、

$$\mathbf{h}_k^{(l)} = \mathbf{h}(kT - (l-1)T/L)$$

$$\mathbf{n}_k^{(l)} = \mathbf{n}(kT - (l-1)T/L)$$

また、 K はサブチャネル応答の長さを表す。このように表される L 個のサブチャネルに対し、図 1 のように L 個の等化器を用いてブラインド等化を行う。各等化器のインパルス応答の長さは $N+1$ とし、 l 番目の等化器は以下のような式で表されるとする。

$$\mathbf{y}_k^{(l)} = \sum_{m=0}^N \mathbf{x}_{k-m}^{(l)} \boldsymbol{\theta}_m^{(l)}, \quad (3)$$

ただし、 $\boldsymbol{\theta}^{(l)}$ は l 番目の等化器のインパルス応答を表す。このとき、分数間隔等化器は以下のように表される。

$$\mathbf{y}_k = \sum_{l=1}^L \mathbf{y}_k^{(l)}. \quad (4)$$

表現を簡単にするため、以下のようなベクトルおよび行列を定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_k &= [s_k \ s_{k-1} \ \dots \ s_{k-N-K}]^T \in \mathcal{C}^{N+K+1}, \\ \mathbf{n}_k &= [n_k^{(1)} \ \dots \ n_{k-N}^{(1)} \ \dots \ n_k^{(L)} \ \dots \ n_{k-N}^{(L)}]^T \in \mathcal{C}^{L(N+1)}, \\ \mathbf{x}_k &= [x_k^{(1)} \ \dots \ x_{k-N}^{(1)} \ \dots \ x_k^{(L)} \ \dots \ x_{k-N}^{(L)}]^T \in \mathcal{C}^{L(N+1)}, \\ \boldsymbol{\theta} &= [\boldsymbol{\theta}_0^{(1)} \ \dots \ \boldsymbol{\theta}_N^{(1)} \ \dots \ \boldsymbol{\theta}_0^{(L)} \ \dots \ \boldsymbol{\theta}_N^{(L)}]^H \in \mathcal{C}^{L(N+1)}, \\ H_l &= \begin{bmatrix} h_0^{(l)} & \dots & h_K^{(l)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_0^{(l)} & \dots & h_K^{(l)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_0^{(l)} & \dots & h_K^{(l)} \end{bmatrix} \\ &\in \mathcal{C}^{(N+1) \times (N+K+1)}, \end{aligned}$$

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_L \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{L(N+1) \times (N+K+1)}. \quad (5)$$

以上を用いると、(2)から(4)は次式で表すことができる。

$$\mathbf{x}_k = H \mathbf{s}_k + \mathbf{n}_k \quad (6)$$

$$\mathbf{y}_k = \theta^H \mathbf{x}_k. \quad (7)$$

ここで、 $L(N+1) \geq N+K+1$ と仮定し、 H は列フルランクであるとする[2]。ブラインド等化では、本質的に送信信号の位相の復元に関する曖昧さの問題がある。そこで、文献[3],[4]と同様に、本研究における分数間隔等化の目的は、以下を満たす等化器のインパルス応答を求めることとする。つまり、ある $q \in \{1, N+K+1\}$ 、および、ある $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ に対し、

$$\theta^H H = \exp(jn\pi/2) \mathbf{u}_q = \exp(jn\pi/2) [0 \dots 010 \dots 0], \quad (8)$$

を満たす θ を見つけることが、本研究でのブラインド等化の目的である。ただし、 \mathbf{u}_q は q 番目の要素が 1 であるような単位ベクトルを表す。

2-1 線形計画法によるブラインド等化

式 (8) を満たす θ を見つけるために、数理計画法に基づくブラインド等化手法が提案されている[3],[4]。受信信号 \mathbf{x}_k が得られたときに定義される最小化問題を解くことにより、等化器のインパルス応答 θ を求める手法である。本稿では、計算量の観点から以下のような線形計画問題に基づく LP-FSE [4] を用いる。

$$\text{LP-FSE: Minimize } J(\mathbf{x}, \theta) \text{ subject to } \theta \in \mathcal{F} \quad (9)$$

ただし、 $J(\mathbf{x}, \theta)$ および \mathcal{F} は以下で定義される。

$$J(\mathbf{x}, \theta) = \max_k |\text{Re}\{\theta^H \mathbf{x}_k\}|, \quad (10)$$

$$\mathcal{F} = \left\{ \theta \in \mathbb{C}^{L(N+1)} : \sum_{l=1}^L \text{Re}\{\theta_0^{(l)}\} + \text{Im}\{\theta_0^{(l)}\} = 1 \right\}. \quad (11)$$

上記問題は線形計画問題であり、内点法に基づく手法により短い計算時間で解を得ることができる。また、ノイズフリーの場合には、完全なブラインド等化を実現することが示されている。

しかしながら、文献 [4] にも示されているように、ノイズが存在する場合、等化器のインパルス応答 θ が必要以上に長すぎると等化器の性能が低下する。これは、式 (8) で表される方程式の解に自由度があるためである。そこで、等化器の性能の低下を防ぐために、以下のような問題が提案されている。

$$\text{Minimize } J(\mathbf{x}, \theta) \text{ subject to } \theta \in \mathcal{F} \cap \mathcal{S} \quad (12)$$

ただし、 \mathcal{S} は以下で定義される。

$$\mathcal{S} = \left\{ \theta \in \mathbb{C}_{\Gamma(\hat{K}+1)} : \begin{array}{l} \mathbf{r} = \mathbf{V} + \mathbf{K} + \mathbf{J}' \dots \Gamma(\hat{K}+1) \\ \theta^{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \end{array} \right\}. \quad (13)$$

ここで、 \hat{K} はチャンネル応答の長さ K の推定値である。つまり、制約条件に集合 \mathcal{S} を追加することで θ をスパースにし、式 (8) の解の自由度を減らしている。等化性能を向上させている。しかし、 \hat{K} は未知であり、時間とともに変化

する場合も考えられる。また、 \hat{K} が真の値より小さいと等化は不可能である。そのため、 \hat{K} を十分に大きく設定しておく必要があり、これにより等化性能の劣化を招く。そこで本研究では、適切な要素を持つスパースな θ を求めることにより、精度の良い等化を実現する手法、および、ランク最小化により自由度を減らすを提案する。

3 提案手法

3-1 スパースベクトルによる手法

前述のように、式 (8) には解の自由度があるため、チャネル応答長 K が未知の場合には、等化性能が低下する。そこで本研究では、以下のような L_0 ノルム最小化問題を考える。

$$\text{Minimize } \|\theta\|_{l_0} \quad \text{subject to } \theta^H H = \exp(jn\pi/2)u_q \quad (14)$$

$\|\cdot\|_{l_0}$ はベクトルの L_0 ノルムを表し、ベクトルの非零の要素数と一致する。H が与えられたと仮定したとき、問題 (14) の厳密な解を求めるには、 θ の非零になる要素の全ての組み合わせを調べる必要がある。 θ が $L(N+1)$ 次元ベクトルであることから、最悪の場合には $\sum_{k=1}^{L(N+1)} C_k^{L(N+1)}$ の組み合わせを調べる必要があり、現実的な時間で解くことはできない。そこで以下のような L_1 ノルム最小化問題を考える。

$$\text{Minimize } \|\theta\|_{l_1} \quad \text{subject to } \theta^H H = \exp(jn\pi/2)u_q \quad (15)$$

ただし、 $\|\cdot\|_{l_1}$ はベクトルの L_1 ノルムを表す。上記問題は線形計画問題として解くことができる。 L_1 ノルム最小化問題は、 L_0 ノルム最小化問題の良い近似を与えることが知られており、問題 (15) を解くことで問題 (14) の近似解が得られる。

ブラインド等化ではチャネル応答 H は未知である。そこで、すでに提案されている問題 (9) と問題 (15) を組み合わせ、以下のような最小化問題を提案する。

$$\text{Minimize } J(x, \theta) + \gamma \|\theta\|_{l_0} \quad \text{subject to } \theta \in \mathcal{F} \quad (16)$$

ただし、 $J(x, \theta)$ および \mathcal{F} は、それぞれ (10) および (11) で与えられる。また、 $\gamma > 0$ は与えられた定数とする。上記問題を解くことで、ブラインド等化を実現し、かつ、 θ の非零の要素数を小さくする解を得ることができる。本研究では、得られた θ の要素のうち 0 に近い値を持つ要素を 0 に丸めた $\hat{\theta}$ の L_0 ノルムを求め、適切な集合 S を与えて問題 (12) を解く手法を提案する。提案するアルゴリズムは以下のようになる。

Algorithm 1 受信信号 $x = [x_{Tk} \ x_{Tk+1} \ \dots \ x_{Tk+p-1}]^T$, $\gamma > 0$, $\epsilon > 0$ が与えられたとき、以下を行う。

Step 1. 問題 (16) を解く。

Step 2. 以下に従い $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_{L(N+1)}]^T$ を計算する。

$$\hat{\theta}_i = \begin{cases} \theta_i, & \text{if } \theta_i \geq \epsilon \\ 0, & \text{if } \theta_i < \epsilon \end{cases}$$

Step 3. $k = \|\theta\|_{l_0}$ とし、以下で与えられる S に対して問題 (12) を解く

$$\mathcal{S} = \left\{ \theta \in C_{T(N+1)} : \begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{I}^1 \dots \mathbf{I}^k \Gamma(N+1) \\ \theta^k = 0 \end{cases} \right\}$$

記アルゴリズムでは、線形計画問題を2回解いている。次に提案手法の計算量について考える。問題 (12) で与えられる従来法では、 $2(N+1)L+1$ 個の変数と $2p+1+2(N+1)L-2(N+K+1)$ 個の制約式から成る線形計画問題となり、内点法に基づく解法では $O(\sqrt{2NLM})$ の繰り返し計算が必要になる。ここで、 M は内点法に必要な入力データをバイナリ形式で表現した場合のビット数である。各繰り返し計算に必要な演算量は $O((2p+2NL)^{2.5})$ である。これに対し、問題 (16) では、 $3(N+1)L+1$ 個の変数と $2p+1+4(N+1)L$ 個の制約式から成る線形計画問題となり、内点法に基づく解法では $O(\sqrt{3NLM})$ の繰り返し計算が必要になる。また、各繰り返し計算に必要な演算量は $O((2p+3NL)^{2.5})$ である。実際には、 $p \gg NL$ であるため、問題 (12) と問題 (16) を解くのに要する計算時間は、ほとんど同じである。提案手法では2つの問題を解くため、これらを足した演算量になる。よって、従来法の2倍以下の計算量となる。

3-2 ランク最小化による手法

θ の自由度を制限する、もう一つの手法として、ランク最小化による手法を提案する。式(16)に代わり、以下の問題を与える。

$$\text{Minimize } J(x, \theta) + w \text{rank} \Theta \quad \text{subject to } \theta \in \mathcal{F},$$

上記問題はランク最小化問題を含み、一般には NP 困難な問題で解くのは難しい。そこで本研究では、ランク最小化問題を Nuclear Norm 最小化問題に置き換えて近似解を与える手法を用いる。この手法は、Nuclear Norm heuristic として知られ、ランク最小化問題の良い近似解を与える。また、Nuclear Norm 最小化問題は SDP として定式化されることが示されている。最終的に以下のような問題を得る。

$$\text{MIN-LSSE:} \quad \begin{array}{l} \text{optimize for } \left[\begin{array}{cc} \mathcal{H}(\theta) & \Lambda \\ \Omega & \mathcal{H}(\theta)_{\perp} \end{array} \right] \succeq 0, \theta \in \mathcal{F} \\ \text{minimize } \gamma(x, \theta) + \alpha (\text{tr} \Omega + \text{tr} \Lambda) \end{array}$$

ただし、

$$\mathcal{H}(b) := \begin{bmatrix} \text{Im}\{b\} & \text{Re}\{b\} \\ \text{Re}\{b\} & -\text{Im}\{b\} \end{bmatrix}.$$

上記問題は内点法に基づくアルゴリズムにより短い時間で解くことができる。

4 数値実験

本節では提案手法の有効性を示すために、数値実験を行う。全ての計算は 2.26 GHz XeonのCPUと4GBのメモリを持つPC上で行い、数値計算には MATLAB を利用した。線形計画問題のソルバには SeDuMi[18] を利用し、MATLAB コマンド `maxNumCompThreads` を用いて全てシングルスレッドで計算した。

まず最初に、問題 (16) により、必要な等化器のインパルス応答長を正しく推定可能かどうかを調べるため、図2 に示すチャネル応答に対し、 $\gamma=1$ として問題 (16) を適用した。図2は乱数を用いて生成したレイリーフェージングチャネルであり、チャネル応答長は 10 である。 $L=4, p=1000$ として得られた受信信号を用いて線形計画問題を解き、等化器のインパルス応答を求めた。等化器のインパルス応答長 $N+1=6, 8, 10, 12$ に対して数値実験を行った。Algorithm 1 の Step 2 において $\varepsilon=10^{-10}$ とした場合に計算される θ の L_0 ノルムを計算した結果を表1 に示す。 $\theta=N+K+1$ から計算される理論値、雑音がない場合、送信信号に対する加法的雑音の SN 比が 28[dB] の場合の結果である。雑音がない場合には理論値と一致することが確認でき、雑音がある場合、理論値よりも小さ

い値になることが確認できる。この理由は、 $\|\theta^*\|_0$ から 推定されるチャネル応答の長さが 7 または 8 と計算されることから、チャネル応答の 9 番目と 10 番目の要素が小さいためと考えられる。

次に、問題 (9) で与えられる従来法、問題 (16) のみによる等化、および、提案手法の比較を行った。乱数により生成されたレイリーフェージングチャネルに対し、 $L=4, N=7, p=1000, \gamma=1, \varepsilon=10^{-10}$ とし実験を行った。図 3 および図 4 は実験結果を示し、それぞれ受信信号に対する雑音の SN 比と BER の関係、および、平均2乗誤差 (MSE) を示している。BER および MSE は、乱数によって生成された 100 種類のチャネル応答に対する合計 10^5 個のシンボルにより計算している。等化器のインパルス応答 θ をスパースにすることにより等化の精度が向上し、推定されたインパルス応答長を利用してもう一度線形計画問題を解くことにより、さらに等化の精度が向上していることが確認できる。

計算時間の測定結果を示す。上記実験と同じ条件とし、利用する受信信号の数のみを変化させて計算時間を測定した。結果を表 2 に示す。前説で述べたとおり、従来法の問題 (9) と L_1 最小化問題である問題 (16) の計算時間は、ほとんど同じである。問題 (12) では推定された等化器のインパルス応答長に基づいて制約条件にスパースベクトルになるための条件があるため、変数の数が減少し、他の問題よりも短い計算時間で計算可能である。そのため、提案手法では線形計画問題 2 度解いているにもかかわらず、総計算時間は従来法の 1.7 倍程度に収まっている。

図 5 に提案する NU-FSE と LP-FSE の比較結果を示す。提案手法では、行列のランク最小化を行い、推定する θ の自由度をランク最小化により制限することで、ブライント等化の精度が向上していることが確認できる。

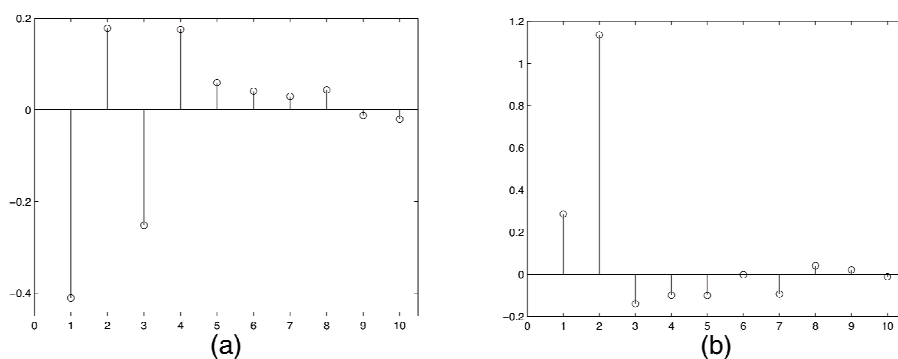


図 2 チャネル応答 (a)実部 (b)虚部

$N + 1$	理論値	雑音なし	雑音あり (28[dB])
6	1 5	15	12
8	1 7	17	14
10	1 9	19	17
12	2 11	21	18

表1

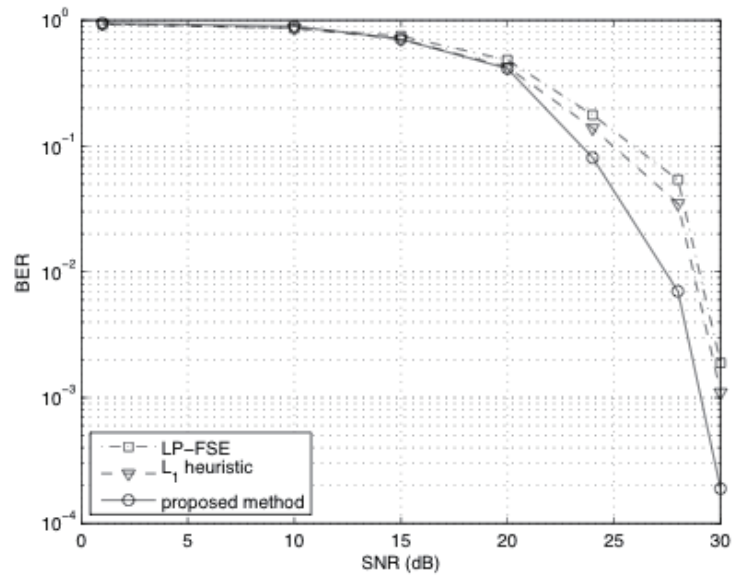


図3 SNR vs. BER.従来法 (LP-FSE),問題 (16) のみ による等化 (L1 heuristic),提案手法 (proposed method) の比較.

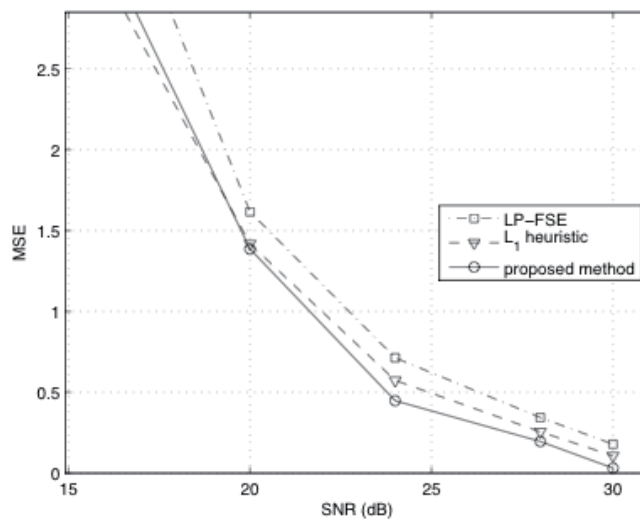


図4 SNR vs. MSE.従来法 (LP-FSE),問題 (16) のみ による等化 (L1 heuristic),提案手法 (proposed method) の比較.

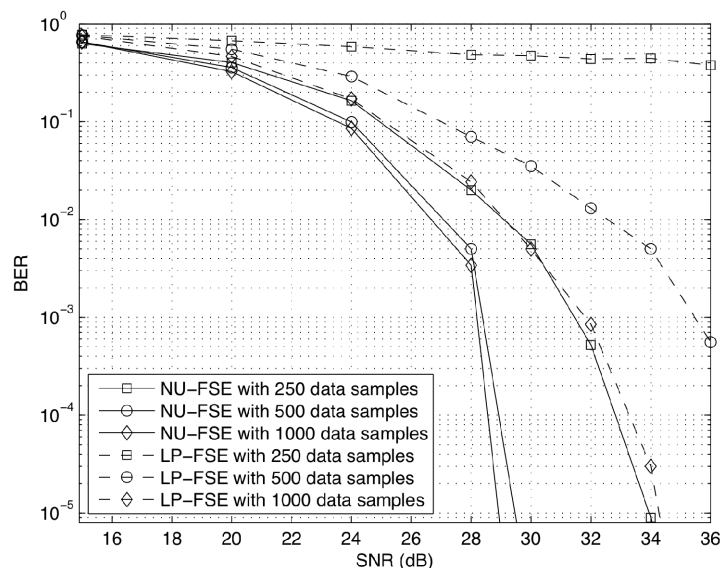


図5 NU-FSE と LP-FSE の比較

4 まとめ

本研究では、数理計画法に基づくスパースな分数間隔等化手法を提案した。分数間隔等化に基づく等化では、チャネル応答長の長さは未知の場合に等化性能が低下するという問題がある。これに対し、等化器のインパルス応答を求める問題をスパースなベクトルを求める問題、また、ランク最小化問題として定式化し、適切な長さを持つ等化器のインパルス応答を求める手法を提案した。数値実験により、適切な長さを持つ等化器が求められることを確認し、従来法よりも精度の高いブラインド等化 が実現可能であることが確認された。これらの数値実験結果は、本研究で提案するブラインド等化手法の有効性を示している。

【参考文献】

- [1] Z. Ding, "On convergence analysis of fractionally spaced adaptive blind equalizers", IEEE Trans. Signal Proc., vol. 45, no. 3, pp. 650- 657, 1997.
- [2] Y. Li and Z. Ding, "Blind channel identification based on second order cyclostationary statistics", in Proc. Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing (ICASSP), vol. 4, pp. 81- 84, Apr. 1993.

- [3] C. Meng, J. Tuwan, and Z. Ding, “A Quadratic Programming Approach to Blind Equalization and Signal Separation”, IEEE trans. on Signal Processing, vol. 57. no. 6, pp. 2232– 2244, 2009
- [4] Z.-Q. Luo, M. Meng, K. M. Wong, and J.-K. Zhang, “A fractionally spaced blind equalizer based on linear programming”, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 50, no. 7, pp. 1650 – 1660, 2002.
- [5] J. Mattingley and S. Boyd, “Real-Time Convex Optimization in Signal Processing”, IEEE Signal Processing Magazine, 27(3):50– 61, May 2010
- [6] H. L. Taylor, S. C. Banks, and J. F. McCoy, “Deconvolution with the L1 norm”, Geophysics, vol. 44, no. 1, pp. 39– 52, Jan. 1979
- [7] J. F. Claerbout and F. Muir, “Robust modeling with erratic data”, Geophysics, vol. 38, no. 5, pp. 826– 844, Oct. 1973
- [8] F. Santosa and W. W. Symes, “Linear inversion of band-limited reection seismograms”, SIAM J. Sci. Stat. Comput., vol. 7, no. 4, pp. 1307– 1330, 1986
- [9] D. L. Donoho and P. B. Stark, “Uncertainty principles and signal recovery”, SIAM J. Appl. Math., vol. 49, no. 3, pp. 906– 931, June 1989
- [10] D. L. Donoho and B. F. Logan, “Signal recovery and the large sieve”, SIAM J. Appl. Math., vol. 52, no. 2, pp. 577– 591, Apr. 1992
- [11] R. Tibshirani, “Regression shrinkage and selection via the lasso”, J. Royal. Statist. Soc B., vol. 58, no.1, pp. 267– 288, 1996
- [12] S. Chen, D. Donoho, and M. Saunders, “Atomic decomposition by basis pursuit”, SIAM J. on Sci. Comp., vol. 20, no. 1, pp. 33– 61, 1998
- [13] L. I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi, “Nonlinear total variation based noise removal algorithms”, Phys. D, vol. 60, no. 1-4, pp. 259– 268, 1992
- [14] P. Blomgren and T. F. Chan, “Color TV:total variation methods for restoration of vector-valued images”, IEEE Trans. Image Processing, vol. 7, pp. 304– 309, March 1998
- [15] E. J. Candès, J. Romberg, and T. Tao, “Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information”, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 52, no. 2, pp. 489– 509, Feb. 2006
- [16] E. J. Candès and T. Tao, “Near optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?”, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 52, no. 12, pp. 5406

- 5425, Dec. 2006

[17] D. Donoho, "Compressed sensing", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 52, no. 4, pp. 1289- 1306, Apr. 2006

[18] J. F. Sturm, "Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones", Optim. Methods Softw. vol. 11- 12, pp. 625- 653, 1999

〈発 表 資 料〉

題 名	掲載誌・学会名等	発表年月
L1ノルム最小化に基づくスパースな分数間隔等化手法	電子情報通信学会第25回信号処理シンポジウム	2010年11月
A Nuclear Norm Heuristic Approach to Fractionally Spaced Blind Channel Equalization	IEEE Signal Processing Letters, Vol. 18 Issue 1, 2011	2011年1月
A nuclear norm minimization approach to fractionally spaced blind channel equalization	IEEE 53rd IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS)	2010年8月