

CIP法を用いた電磁界解析技術の確立と大規模問題への応用

代表研究者 安藤 芳晃 電気通信大学 電気通信学部 准教授

1 まえがき

本研究の目的は、新しい電磁界解析手法として注目されているCIP(Constrained Interpolation Profile)法を、アンテナやマイクロ波・ミリ波帯平面波回路を解析できるユニバーサルな解析手法に完成させることである。最も汎用的な数値電磁界シミュレーションは、離散化した空間格子上の電磁界をマクスウェルの方程式に従って計算する手法であり、従来は有限差分時間領域(Finite-Difference Time-Domain; FDTD)法などが広く使われている。しかし、解析対象の空間的スケール・構造の微細性・要求される精度が異なる混合問題解析を行うには、更に簡易・省計算資源・高速・高精度な手法が求められており、その解決の一つとしてCIP法が注目されている。

2 CIP法における全電磁場／散乱場(TF/SF)境界の開発

2-1 TF/SF 境界

CIP法を電磁界解析固有の諸問題に対応させる個別技術の一つとして、任意の入射場を与えるための全電磁場／散乱場(Total-Field/Scattered-Field; TF/SF)境界の開発を行った。TF/SF境界は、解析領域内に架空の境界(TF/SF境界)を設け、境界の外は散乱場(Scattered-Field; SF)のみを計算、領域の中で全電磁場(Total-Field; TF)を計算、境界における入射場を考慮することでMaxwellの方程式を満足させる手法である。これまで1次元CIP法におけるTF/SF境界を開発し終えていたが[1]、本研究計画期間内に多次元手法を開発、その性能の検証を行った。多次元の場合は、1次元の単なる拡張とは異なる。CIP法を多次元のMaxwellの方程式に適用する際に、方向分離スキームを導入することになるが、その各方向への移流における入射場を求める必要がある。そこで、本研究では各時間ステップの解析的に得られる入射場をCIP法で直接計算して、各移流相における入射場を求めることを試みる。

また開発したTF/SF境界を用いて散乱問題を設定し、散乱体に平面波を入射させることで開発したTF/SF境界の適用性について検討する。

2-2 定式化

ここでは2次元のTMz波における定式化を試みる。TEz波および3次元問題については容易に拡張ができる。本研究ではM型CIP法[2]を用いて定式化を行う。また、電磁界は文献[3]で用いたように以下のような規格化した量で表記する。

$$e_z = \sqrt{\epsilon_0} E_z, \quad h_x = \sqrt{\mu_0} H_x, \quad h_y = \sqrt{\mu_0} H_y$$

Maxwellの方程式の線形性より、全電磁場($e_{t,z}, h_{t,x}, h_{t,y}$)は入射波($\hat{e}_z, \hat{h}_x, \hat{h}_y$)と散乱場($e_{s,z}, h_{s,x}, h_{s,y}$)に分けることができる。M型CIP法では直接Maxwellの方程式に適用することはできないので、2方向に方向分離する。方向分離された式は移流方程式に直すことができ、その際に移流する場は

$$\begin{aligned} f_{t,x}^\pm &= e_{t,z} \mp h_{t,y}, & g_{t,x}^\pm &= \partial_x f_{t,x}, & \eta_{t,x}^\pm &= \partial_y f_{t,x} \\ f_{t,y}^\pm &= h_{t,x} \pm e_{t,z}, & g_{t,y}^\pm &= \partial_y f_{t,y}, & \eta_{t,y}^\pm &= \partial_x f_{t,y} \end{aligned}$$

となる。ここで、 ∂_α は α 方向の偏微分作用素である。時間および空間の差分化を $\Delta t, \Delta x, \Delta y$ とすると、時刻 $n\Delta t$

および空間($i\Delta x, j\Delta y$)にある場の成分を $f_{t,x}^{\pm,n}(i, j) \equiv f_{t,x}^\pm(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$ と表記する。

計算領域は全電磁場を計算するTF領域($i_1 \leq i \leq i_2$ かつ $j_1 \leq j \leq j_2$)と、散乱場のみを計算するSF領域に分割する。メモリにはTF領域に関しては全電磁場、SF領域に関しては散乱場のみを保存する。TFおよびSF

領域のいずれも更新式は通常 CIP 法と同じであり、 x 方向の移流相においては

$$\begin{aligned} f_x^{+,*}(i, j) &= A_{x1}^+ f_x^{+,n}(i, j) + A_{x2}^+ f_x^{+,n}(i-1, j) + A_{x3}^+ g_x^{+,n}(i, j) + A_{x4}^+ g_x^{+,n}(i-1, j) \\ g_x^{+,*}(i, j) &= B_{x1}^+ g_x^{+,n}(i, j) + B_{x2}^+ g_x^{+,n}(i-1, j) + B_{x3}^+ f_x^{+,n}(i, j) + B_{x4}^+ f_x^{+,n}(i-1, j) \\ \eta_x^{+,*}(i, j) &= C_{x1}^+ \eta_x^{+,n}(i, j) + C_{x2}^+ \eta_x^{+,n}(i-1, j) \end{aligned}$$

となる。係数 $A_{xm}^+, B_{xm}^+, C_{xm}^+$ については文献[1]の通りである。TF 領域と SF 領域の境界ではこの更新式の一部が TF、他が SF となるので、TF のみ、または SF のみの更新式となるよう修正が必要である。 $i = i_1$ における TF/SF 境界では、入射場を用いて以下のように TF に対する更新式に変更する。

$$\begin{aligned} f_{i,x}^{+,*}(i, j) &= A_{x1}^+ f_{i,x}^{+,n}(i, j) + A_{x2}^+ \left\{ f_{s,x}^{+,n}(i-1, j) + \hat{f}_x^{+,n}(i-1, j) \right\} \\ &\quad + A_{x3}^+ g_{i,x}^{+,n}(i, j) + A_{x4}^+ \left\{ g_{s,x}^{+,n}(i-1, j) + \hat{g}_x^{+,n}(i-1, j) \right\} \\ g_{i,x}^{+,*}(i, j) &= B_{x1}^+ g_{i,x}^{+,n}(i, j) + B_{x2}^+ \left\{ g_{s,x}^{+,n}(i-1, j) + \hat{g}_x^{+,n}(i-1, j) \right\} \\ &\quad + B_{x3}^+ f_{i,x}^{+,n}(i, j) + B_{x4}^+ \left\{ f_{s,x}^{+,n}(i-1, j) + \hat{f}_x^{+,n}(i-1, j) \right\} \\ \eta_{i,x}^{+,*}(i, j) &= C_{x1}^+ \eta_{i,x}^{+,n}(i, j) + C_{x2}^+ \left\{ \eta_{s,x}^{+,n}(i-1, j) + \hat{\eta}_x^{+,n}(i-1, j) \right\} \end{aligned}$$

他の境界についても同様に、入射場を考慮して TF または SF の更新式に修正すればよい。

続いて y 方向の移流相の計算となるが、このときの入射波は既に x 方向の移流をした場を用いる必要がある。 x 方向の移流をした \hat{e}_z^* は以下で求められる。

$$\hat{e}_z^*(i, j) = \frac{1}{2} \left\{ \hat{f}_x^{+,*}(i, j) + \hat{f}_x^{-,*}(i, j) \right\}$$

ここで、 $\hat{f}_x^{\pm,*}(i, j)$ は x 方向に移流した場であり、次式で計算できる。

$$\hat{f}_x^{\pm,*}(i, j) = A_{x1}^{\pm} \hat{f}_x^{\pm,n}(i, j) + A_{x2}^{\pm} \hat{f}_x^{\pm,n}(i \mp 1, j) + A_{x3}^{\pm} \hat{g}_x^{\pm,n}(i, j) + A_{x4}^{\pm} \hat{g}_x^{\pm,n}(i \mp 1, j)$$

結局、 y 方向の移流に対する入射場は次式で計算できる。

$$\hat{f}_y^{\pm,*}(i, j) = \hat{h}_x^n(i, j) \pm \hat{e}_z^*(i, j)$$

他の場 ($\hat{g}_y^{\pm,*}, \hat{\eta}_y^{\pm,*}$) についても同様の計算を行うことで得られる。ここで計算された入射場を用いて y 方向の移流についても TF/SF 境界を計算すればよい。

2-3 数値計算結果

(1) 提案した TF/SF 境界の性能評価

提案した TF/SF 境界の数値計算による性能評価を行う。性能評価に適した指標としては、散乱体が存在しないときの散乱場(SF)を計測することである。理論的には散乱体が存在しなければ散乱波は発生せず、SF 領域には場は観測されない。しかし TF/SF 境界の場の不連続が存在すると、SF 領域において非零の場が観測される。ここではその SF を「リーク」と定義し、このリークを TF/SF 境界の性能評価の指標として用いる。

図 1 は TF/SF 境界の性能評価のための数値テストの形状である。計算領域は真空とし、 $100\Delta x \times 100\Delta y$ のグリッドから構成されている。TF 領域はその中央に $64\Delta x \times 64\Delta y$ を用意した(即ち、 $i_1 = j_1 = 18$ および $i_2 = j_2 = 82$ である)。図中の破線が TF/SF 境界を表している。入射平面波を図の矢印の方向(x 軸と θ の角度をなす方向)に伝搬させる。平面波として

$$\hat{e}_z(x, y, t) = \exp\left(-\frac{\left\{c_0 t - \hat{\mathbf{k}}_0 \cdot \mathbf{r} - s\right\}^2}{2\sigma^2}\right)$$

を選んだ。ここで、 c_0 は真空中の光速、 $\hat{\mathbf{k}}_0$ は伝搬方向の単位ベクトルであり、 $\hat{\mathbf{k}}_0 = \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}}$ 、 \mathbf{r} は

位置ベクトルであり $\mathbf{r} = i\Delta x \hat{\mathbf{x}} + j\Delta y \hat{\mathbf{y}}$ 、 s は波頭を TF/SF に差し

掛からないようにするオフセットである。図1のA~Eの点はリークを観測するための観測点であり、 $(i, j) = (17, 50), (17, 83), (50, 83), (83, 83), (83, 50)$ の位置としている。

図2は数値計算結果であり、計算領域全体の各時刻における e_z の強度をグレイスケールで表示したものである。ここでも、参考のための TF/SF 領域を破線で示している。計算に用いたパラメータは $\Delta x = \Delta y = \Delta = 2.998/200\pi \doteq 4.77 \times 10^{-3}$ 、 $\Delta t = 7.958 \times 10^{-12}$ 、クーラン数 $\xi = 0.5$ 、 $\theta = \pi/4$ 、 $s = 40\Delta$ 、 $s = 4\sigma + 32\sqrt{2}\Delta - \hat{\mathbf{k}}_0 \cdot \mathbf{r}_c$ 、

$\mathbf{r}_c = 50\Delta x \hat{\mathbf{x}} + 50\Delta y \hat{\mathbf{y}}$ である。図から見て分かる通り、本研究で

提案した TF/SF 境界によって、TF 領域中に入射平面波が生成されて伝搬している様子が分かる。また、この色調では SF 領域にリークは認められない。

リークをより詳細に検討するために、A~Eの観測点における観測された散乱電界の時間波形について、 $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ のときの結果を図3に示す。全ての場合においてごく微小なリークが観測されており、その振幅は入射波の 0.2% 以下であることが分かる。特に、平面波が計算グリッド中の座標軸に沿って伝搬する際は、リークはほぼ無視できる大きさと言ってよい。図3(b)は比較的大きなリークが観測されており、これは伝搬方向がグリッドに対し斜めとなっているときである。 $\theta = 0$ および $\pi/2$ のときの結果では、最も大きなリークは入射波が TF 領域中を最も長い距離伝搬したところに相当する点で観測されている。

これらの数値計算結果から、本研究で提案している TF/SF 境界は十分な精度で良好に動作していると結論できる。

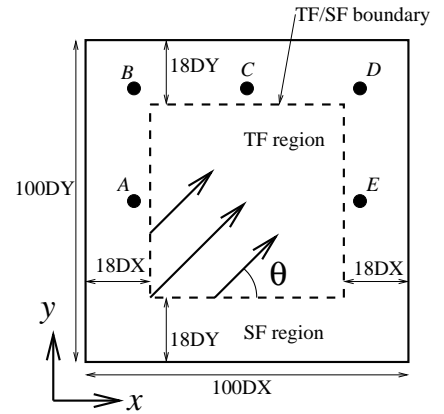


図1. リーク解析のための形状

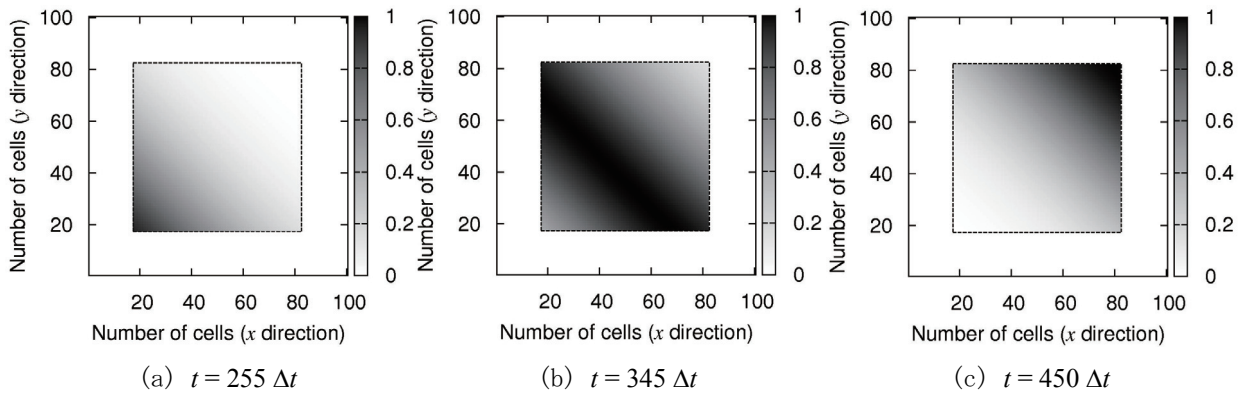


図2. 電界強度

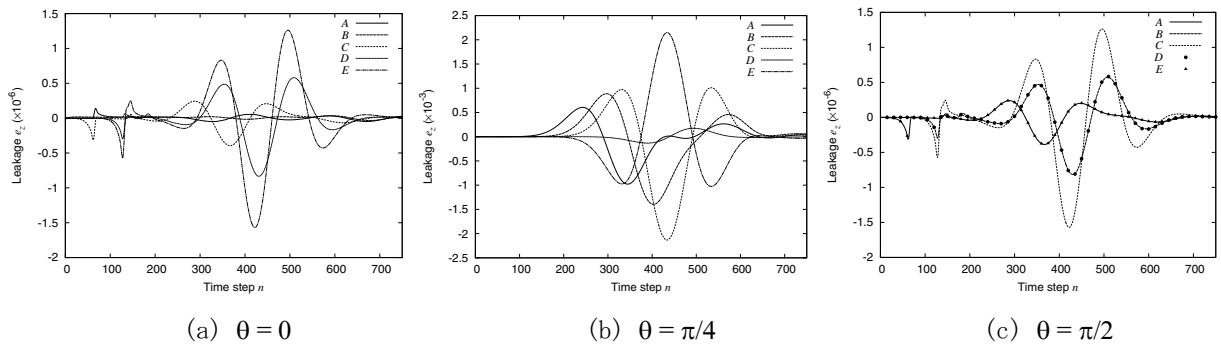


図3. 入射角度を変えたときの観測点におけるリークの時間波形

(2) 散乱問題への適用

開発した TF/SF 境界を用いて、散乱問題の解法へ適用する。ここでは図 4 に示すように完全導体で構成された四角柱からの散乱を計算する。辺の長さ s を $k_0s = 2$ と設定する。ここで k_0 は真空中の波数である。TMz 偏波の平面波を x 軸から θ の角度で入射させる。P から S のラベルを付した点線は散乱場を観測するための線であり、散乱体から $k_0d = 0.7$ 離れた位置にある。TF/SF 境界は散乱体から $k_0h = 0.6$ 離れた位置に設置し、図では破線で示している。通常の規範問題では円柱導体などが利用されるが、この数値計算では四角導体柱を設定している。これは、正方グリッドにおいて円柱導体を設置する場合、階段近似などの誤差が入るためである。ここでは参照解として従来からよく用いられている FDTD 法の解との比較を行う。

図 4 は入射角度 $\theta = 0$ のときの散乱場 e_z^s の振幅を、図 3 中の破線に沿ってプロットしたものである。散乱体の一边は 40 セルで離散化し、解析領域は吸収境界の影響を取り除くために大きく取って $N_x = N_y = 1200$ とした。図 5 は同じ条件のときの、点 P を基準としたときの位相をプロットしている。振幅、位相ともに FDTD 法の結果とよく一致しており、CIP 法で散乱問題が解けていることが分かる。

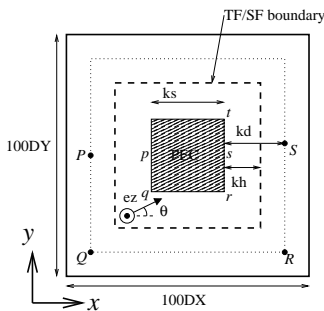


図 4. 散乱問題の形状

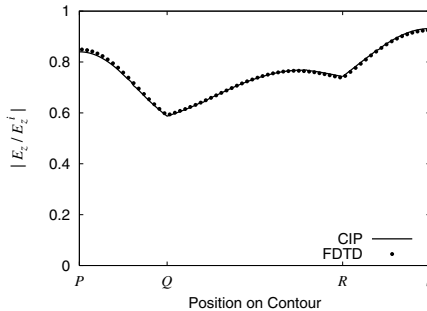


図 5. 近傍場の振幅

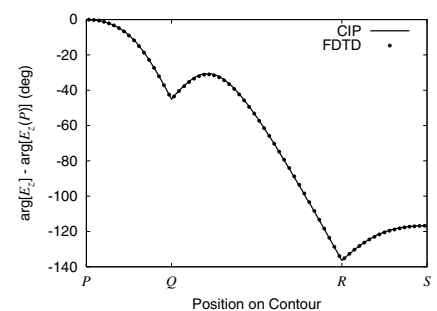


図 6. 近傍場の位相

2-4 結論

ここでは、M 型 CIP 法に用いる TF/SF 境界を提案した。TF/SF 境界は入射波を加算・減算することで、境界上での移流方程式を満足させるようにすることで実現できる。多次元 CIP 法では 2 つ以上の移流相で計算されるが、2 番目以降の移流相においては入射波そのものも CIP 法から計算することで、入射波を計算することができる。提案した TF/SF 境界を、散乱体のない状態で動作させたところ、TF/SF 境界での場の不連続から起こるリークは極めて小さく、ここで提案した TF/SF 境界が高精度で動作していることが分かった。また、四角導体柱に対する散乱問題にも適用し、従来法である FDTD 法と同等の結果を得た。

3 一次元 CIP-BS 法の開発と各種差分スキームの検討

3-1 はじめに

従来、流体力学分野における多相問題を解く手法として開発された CIP 法であるが、これまで電磁界問題にいくつか適用されてきた [1, 3, 4]。また、近年になり基底関数の観点から見直した CIP Basis-Set (CIP-BS) 法が開発された [5]。CIP 法を Maxwell 方程式に応用する場合には、方向分離を行う必要があり、基礎とする方程式系を変更しているという難点があったが、CIP-BS 法では変更なく直接適用が可能である。そこで、本研究では、CIP-BS 法を電磁界問題に適用することを考える。

3-2 CIP 基底関数

CIP-BS 法では、グリッド点 x_i で K 階微分値まで ($f_i^{(k)}, k = 0, 1, \dots, K$) を保存することで、解くべき場 $f(x)$ を

$$f(x) = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^K f_i^{(k)} \phi_i^{(k)}(x)$$

と展開するものである。 K 階微分値まで用いる場合、CIP-BS^K 法と呼ぶ。各基底関数 $\phi_i^{(k)}(x)$ は、 $x_{i-1} \leq x \leq x_{i1}$

と $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ の範囲における 2 つの区分的な $2K+1$ 次多項式で表され、次式の条件を満たすように多項式は決定される。

$$\frac{d^l}{dx^l} \phi_i^{(k)}(x_i) = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases}$$

$$\frac{d^l}{dx^l} \phi_i^{(k)}(x_{i+1}) = 0$$

CIP-BS⁰ 法の場合、基底関数は通常の区分的線形関数となる。また、CIP-BS¹ 法の場合、

$$\phi_0^{(0)}(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\Delta x^3} x^3 - \frac{3}{\Delta x^2} x^2 + 1, & -\Delta x \leq x \leq 0 \\ \frac{2}{\Delta x^3} x^3 - \frac{3}{\Delta x^2} x^2 + 1, & 0 \leq x \leq \Delta x \\ 0, & |x| > \Delta x \end{cases}$$

$$\phi_0^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\Delta x^2} x^3 - \frac{2}{\Delta x} x^2 + x, & -\Delta x \leq x \leq 0 \\ -\frac{2}{\Delta x^2} x^3 + \frac{2}{\Delta x} x^2 + x, & 0 \leq x \leq \Delta x \\ 0, & |x| > \Delta x \end{cases}$$

$$\phi_i^{(k)}(x) = \phi_0^{(k)}(x - i\Delta x)$$

となる。これは従来の移流方程式を解く手法であった CIP 法の補関数と等価である。

同様に、 $K \geq 2$ の際の CIP-BS^K 法でも $\phi_i^{(k)}(x)$ が定義されるが、 K の値が異なれば、それぞれ $\phi_i^{(k)}(x)$ の k が同じでも異なる関数となる。

(2) 蛙跳び差分と

ここでは x 方向に変化する 1 次元の Maxwell の方程式

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}, \quad \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

について、基底関数 CIP 法で解く。

3-3 CIP-BS 法での Maxwell の方程式の解法と数値計算例

数値計算例として、CIP-BS¹ 法を用いて 1 次元伝搬問題 (E_z, H_y 偏波) を取り扱う。また時間積分については、簡単な有限差分を用いる。このとき、時間スキームはいくつかの自由度がある。また、FDTD 法などで用いられる Staggered grid も利用し、時間および空間のいくつかの組み合わせについて定式化、精度を検証する。

設定する問題として、完全導体で両端を囲まれた閉領域での初期値問題を取り扱う。この場合には解析的に求めることができ、厳密解との比較が可能である。 $R_x = 0.1$ m の領域 ($0 \leq x \leq R_x$) を 50 セルで分割し

($\Delta x = 0.002$ m)、初期値として、 $t = 0$ において、電界は極めて細いガウシアン分布:

$$E_z(x) = \exp\left(-\frac{\{x - x_0\}^2}{2\sigma^2}\right)$$

とし、磁界は $H_y(x) = 0$ と設定する。ここで、 $\sigma = 3\Delta x, x_0 = R_x/2$ とした。 $x_1 = 0.02$ m の地点に観測点

を設け、時間応答波形を記録した。時間差分 Δt は、Courant 条件より決まる上限 t_c に対し、 $\Delta t = 0.4t_c$ 、即ち Courant 数 $\xi = 0.4$ とした。

また、数値解法の参照解として FDTD 法の結果を用いている。ただし、FDTD 法ではセルサイズを 1/2 とし、 $\Delta x = 0.001$ m とした結果を用いている。これは、CIP-BS¹法の場合には各グリッドで場の値とその空間微分値を保存する必要があり、FDTD 法でセルサイズを 1/2 としたときと使用メモリが同じとなるためである。

(1) 蛙跳び差分、スタaggerド・グリッド

電界を時間差分 Δt に対して整数倍の時刻 $t = n\Delta t$ におき、磁界を半奇数倍の時刻 $t = (n+1/2)\Delta t$ におく(蛙跳び差分)。また、磁界の基底関数のサポートは電界に対して半セルずらした位置に配置する(Staggered grid)。このとき、電磁界の基底関数展開は

$$E_z^n(x) = \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^{N_x} E^{(k),n}(i)\phi_i^{(k)}(x)$$

$$H_y^{n+1/2}(x) = \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^{N_x} H^{(k),n+1/2}(i+1/2)\phi_{i+1/2}^{(k)}(x)$$

となる。ガラーキン法を適用したときの連立一次方程式は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{00} & \mathbf{F}_{01} \\ \mathbf{F}_{10} & \mathbf{F}_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{(0)} \\ \mathbf{E}^{(1)} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{00} & \mathbf{F}_{01} \\ \mathbf{F}_{10} & \mathbf{F}_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{(0)} \\ \mathbf{E}^{(1)} \end{bmatrix}^{n-1} + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0} \begin{bmatrix} \mathbf{F}'_{00} & \mathbf{F}'_{01} \\ \mathbf{F}'_{10} & \mathbf{F}'_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{(0)} \\ \mathbf{H}^{(1)} \end{bmatrix}^{n-1/2}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{00} & \mathbf{F}_{01} \\ \mathbf{F}_{10} & \mathbf{F}_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{(0)} \\ \mathbf{H}^{(1)} \end{bmatrix}^{n+1/2} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{00} & \mathbf{F}_{01} \\ \mathbf{F}_{10} & \mathbf{F}_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{(0)} \\ \mathbf{H}^{(1)} \end{bmatrix}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu_0} \begin{bmatrix} \mathbf{F}'_{00} & \mathbf{F}'_{01} \\ \mathbf{F}'_{10} & \mathbf{F}'_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{(0)} \\ \mathbf{E}^{(1)} \end{bmatrix}^n$$

となる。ここで、 $\mathbf{E}^{(k)}$ は展開係数 $E^{(k)}(i)$ を並べたベクトルであり、 $\mathbf{H}^{(k)}$ も同様である。また、 \mathbf{F}_{kl} は、そ

の (i, j) 成分が $\phi_i^{(k)}$ と $\phi_j^{(l)}$ の内積 $\langle \phi_i^{(k)} | \phi_j^{(l)} \rangle$ となるような行列であり、 \mathbf{F}'_{kl} はその (i, j) 成分が $\langle \phi_i^{(k)} | \frac{d}{dx} \phi_j^{(l)} \rangle$

となるような行列である。いずれも、 i, j のインデックスが離れている場合は内積は0となるため、疎行列であり、この連立方程式を解くのに大きな計算量は必要とされない。最終的には、この連立方程式を交互に解いて電磁界を更新してゆく。

(2) 蛙跳び差分、非スタaggerド・グリッド

CIP-BS¹法は微分可能な基底関数を用いているため、Non-staggered grid を利用することも可能である。このとき、磁界の基底関数は電界と同じセル配置となり、

$$H_y^{n+1/2}(x) = \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^{N_x} H^{(k),n+1/2}(i)\phi_i^{(k)}(x)$$

となる。以降の定式化については、前節の方法と変わらない。

蛙跳び差分を用い、基底関数の配置を Staggered-grid とした場合(w S)と、Non-staggered-grid とした場合(w/o S)の結果を計算結果を図7に示す。この図より、蛙跳び差分を用いた CIP-BS¹法が1次元伝搬問題を解いていることが分かる。また、Staggered grid を用いた場合と用いない場合で結果に違いはないことが分かる。この図においては、セルサイズを 1/2 にした FDTD 法と精度は同等であり、これは多次元へと拡張したときには、CIP-BS 法の方がメモリ効率が

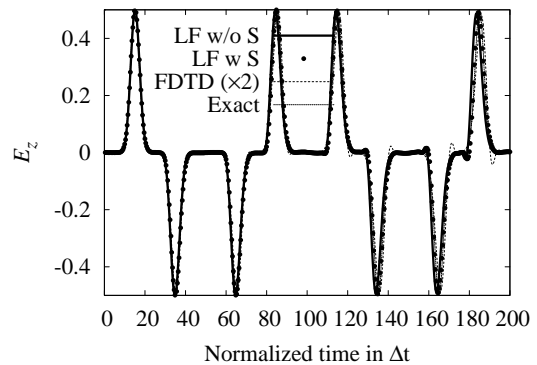


図7. 蛙跳び差分を用いたときの観測波形

高いことが分かる。

(3) 完全陰解法、非スタaggerド・グリッド

CIP-BS 法では、他の時間スキームを用いることが可能である。ここでは、完全陰解法を Non-staggered grid において解く。このとき、電磁界の時間配置は同じとなり、

$$E_z^n(x) = \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^{N_x} E^{(k),n}(i) \phi_i^{(k)}(x)$$

$$H_y^n(x) = \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^{N_x} H^{(k),n}(i) \phi_i^{(k)}(x)$$

で与えられる。これを時間差分した Maxwell の方程式：

$$E_z^n = E_z^{n-1} + \frac{\Delta t}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y^n}{\partial x}$$

$$H_y^n = H_y^{n-1} + \frac{\Delta t}{\mu_0} \frac{\partial E_z^n}{\partial x}$$

に代入して連立方程式を立てることになる。実際には、展開係数 $E^{(k),n}(i), H^{(k),n}(i)$ を同時に解く必要があるため、行列のサイズは 4 倍となる。

完全陰的スキームの CIP-BS 法の結果を図 8 に示す。同様に、蛙跳び差分の結果、FDTD 法の結果と厳密解も示している。完全陰解法の結果は大きく数値拡散していることが観察できる。これは、今回の初期値として高周波まで含む極めて細かいガウシアン分布を入れたためであり、波長に対してセルサイズが粗い成分を含んでいるためである。

完全陰解法の精度は時間ステップ Δt にも依存する。そこで、Courant 数 ξ を小さくとると精度が改善する。図 9 に、 $\xi = 0.4, 0.04, 0.005$ としたときの結果を示す。 Δt を小さくすることで計算結果が厳密解に近づいていることが分かる。今回用いたパラメタでは $\xi = 0.005$ という極めて小さい時間ステップとしないと妥当な精度は得られなかったが、セルサイズを波長に対して小さくしたときは Courant 数が大きくても精度の劣化は見られないものと予想される。

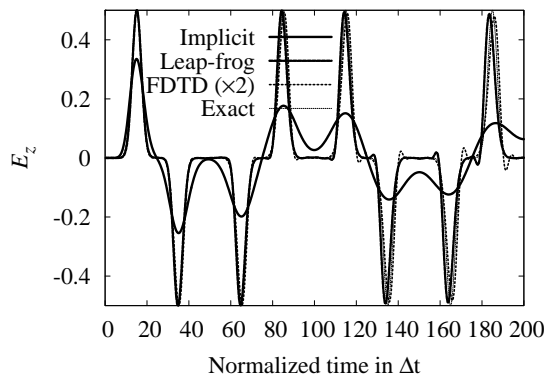


図 8. 陰解法を用いたときの観測波形

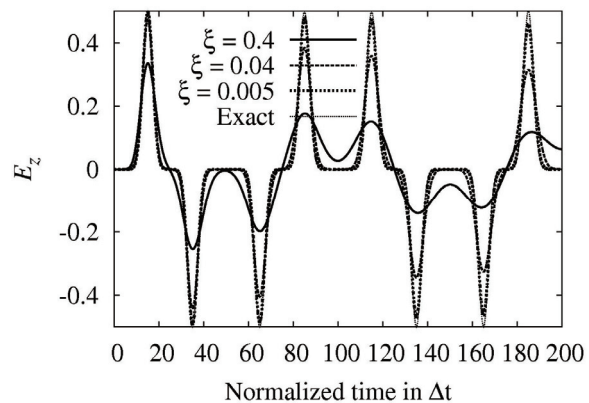


図 9. 陰解法で Courant 数 ξ を変更したとき

(4) Crank=Nicolson 法、非スタaggerド・グリッド

完全陰解法の精度劣化を改善するため、陰的スキームでありながら Δt の 4 次の精度をもつ Crank-Nicolson (C-N) 法を CIP-BS 法に適用する。

基底関数展開は完全陰解法と同一であり、時間差分した Maxwell 方程式は次式となる。

$$E_z^n = E_z^{n-1} + \frac{\Delta t}{2\epsilon_0} \left(\frac{\partial H_y^n}{\partial x} + \frac{\partial H_y^{n-1}}{\partial x} \right)$$

$$H_y^n = H_y^{n-1} + \frac{\Delta t}{2\mu_0} \left(\frac{\partial E_z^n}{\partial x} + \frac{\partial E_z^{n-1}}{\partial x} \right)$$

以降の定式化は完全陰解法の場合と同じであり、行列のサイズも同じであるが、0でない要素はC-N法の方が多い。

C-NスキームのCIP-BS法の結果を図10に示す。ここから、C-N法を用いることで十分な精度が得られていることが分かる。

(5) 誤差の比較

セルサイズを変えたときの厳密解との誤差を図11に示す。横軸にセルサイズ Δx 、縦軸は観測点における時間波形と厳密解との二乗誤差を対数で示している。結果はCIP-BS¹法の蛙跳び差分(CIP-BS¹ L-F)、C-N法(CIP-BS¹ C-N)を示しており、参考のため、蛙跳び差分のCIP-BS⁰とFDTD法の結果も示している。ここから、CIP-BS¹においては蛙跳び差分で陽解法を用いた方が最も精度が良いことが分かる。C-N法は今回CIP-BS⁰よりも精度が落ちているが、C-N法は無条件安定であることから、波長に対して十分細かいセルサイズの解析の際には威力を発揮するものと思われる。

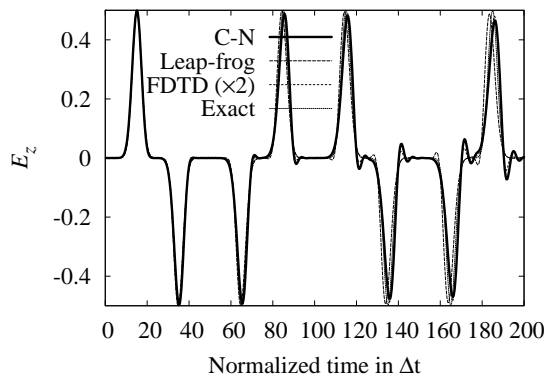


図10. C-N法を用いたときの観測波形

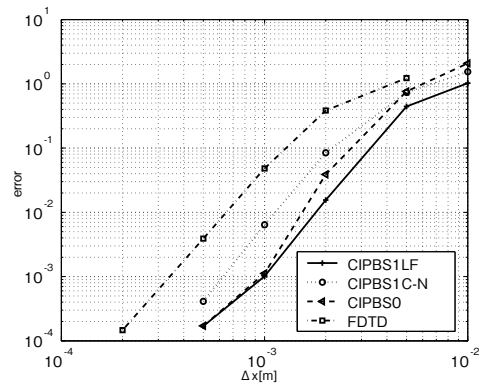


図11. セルサイズを変えたときの相対誤差

3-4 まとめ

CIP-BS法を1次元電磁界問題に適した形で定式化し、時間、空間のスキームをいくつか組み合わせて、精度の検証を行った。CIP-BS¹法では、セルの空間配置が自由に選べること、時間スキームも自由に選べることができ、問題に応じて適切なものを利用できる、極めて柔軟性の高い手法であることが分かった。今回、1次微係数までを用いるCIP-BS¹法のみを検討となったが、セルを細かくする(h-refinement)だけでなく、より高次とする(p-refinement)ことで精度向上が見込めるものと思われる。

4 多次元 CIP-BS 法の開発

4-1 はじめに

本研究では、新しい電磁界解析の手法として多次元のCIP基底関数を導入し、多次元CIP-BS法を開発する。ここでは時間差分スキームとして蛙跳び差分を用い、矩形金属キャビティでの共振モードを用いて厳密解との誤差を検証する。また、CIP-BS法による電流源の実装方法を示した。さらに、1方向伝搬に基づく吸収境界条件の導入についても述べ、その吸収特性を調べた。

4-2 多次元 CIP 基底関数

ここでは2次元についての定式化を述べる。3次元以上については単純な拡張で適用可能である。2次元CIP-BS法では、既に定義した基底関数系 $\{\phi_i^{(k)}(x) \mid k=0,1, i=1,2,\dots\}$ の組み合わせで構成が可能である。

$$\begin{aligned}\Phi_{i,j}^1(x,y) &= \phi_i^{(0)}(x)\phi_j^{(0)}(y) \\ \Phi_{i,j}^2(x,y) &= \phi_i^{(1)}(x)\phi_j^{(0)}(y) \\ \Phi_{i,j}^3(x,y) &= \phi_i^{(0)}(x)\phi_j^{(1)}(y)\end{aligned}$$

これらはそれぞれグリッド点の場の値、 x, y 方向の微係数に対応する基底関数である。この基底関数系を用いて任意の関数 $f(x, y)$ は

$$f(x, y) = \sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} f_{i,j}^l \Phi_{i,j}^l(x, y)$$

と展開することができる。ここで、 $f_{i,j}^l$ は展開係数である。

4-3 数値計算例：矩形金属キャビティの解析

1次元の場合と同様に、電磁場を2次元 CIP 基底関数で展開し、ガラーキン法を適用することで、展開係数を求める連立一次方程式を導出できる。ここでのその適用例として、解析領域を正方領域とし、その解析領域端を完全導体とする矩形金属キャビティを計算した。解析領域は $R_x \times R_y = \sqrt{2}\lambda \times \sqrt{2}\lambda$ 、セルサイズは

$\Delta x = \frac{R_x}{N_x}, \Delta y = \frac{R_y}{N_y}$ 、時間ステップ $\Delta t = \frac{\xi \Delta x}{c_0}$ 、クーラン数は $\xi = 0.2 \sim 0.4$ と変化させた。この矩形金属キャ

ビティを TE_{202} 共振モードで励振した。計算値 $E_{\text{num}}(i, j)$ と厳密解 $E_{\text{exact}}(i, j)$ との相対誤差として、

$$e = \frac{\sum_{i,j} |E_{\text{exact}}(i, j) - E_{\text{num}}(i, j)|}{\sum_{i,j} |E_{\text{exact}}(i, j)|}$$

を定義した。比較のために FDTD 法についても計算を行ったが、CIP-BS 法は FDTD 法の約3倍の未知数を用いて場を更新する。そこで、同じメモリでの比較となるよう、FDTD 法の計算ではセルサイズを細かくし、CIP-BS 法と同程度の未知数となるようにして計算を行っている。

図12はクーラン数 ξ を変えたときの、誤差の未知数依存性である。 $\xi = 0.4$ では未知数を同程度としたときは FDTD 法の方が高精度となっている。しかし、 $\xi = 0.3$ では未知数4000以下で、 $\xi = 0.2$ では表示した全ての未知数で CIP-BS 法の方が高精度であることが分かる。以上より、CIP-BS 法は時間ステップに依存する数値解法であり、特に未知数が少ないときはその性能が精度の点で発揮しやすいことがわかる。これは、通常はなるべく未知数を少なく取りたいという点から、CIP-BS 法が有効な手法であるということが言える。

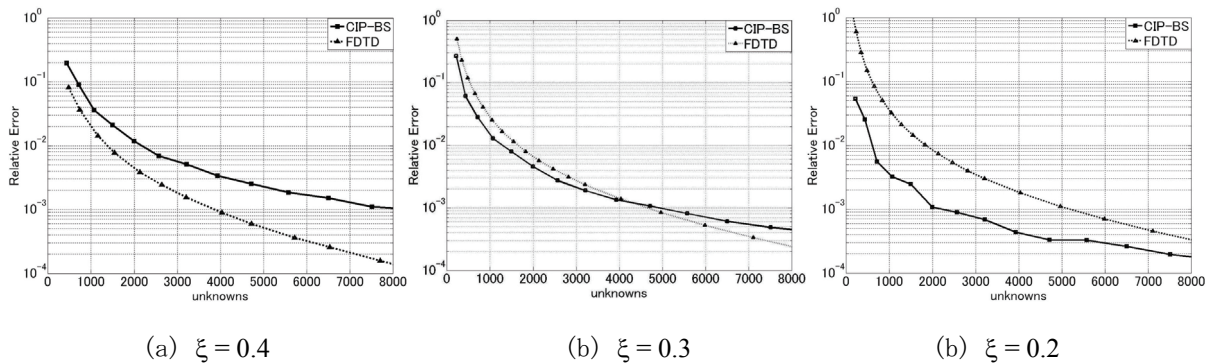


図12. クーラン数 ξ を変えたときの誤差の未知数依存性

4-4 電流源の実装

ここでは、キャビティ内に電流源が存在する場合を数値シミュレーションする。CIP-BS 法で電流源を実装するには、単純にガラーキン法の適用において、電流源と試験関数の内積をとればよい。ここでは電流源で励振したキャビティ内の電磁界を CIP-BS 法と FDTD 法を用いて計算し、観測点での場から位相誤差について評価を行った。用いた電流源は線波源であり

$$J_z(x, y, t) = I(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

$$I(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\{t - 16\sigma\}^2}{2\sigma^2}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), & (t < 16\sigma) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), & (t \geq 16\sigma) \end{cases}$$

で与えられる。ここで、 T は TE_{202} モードの共振周波数における周期、 $\sigma = T/5$ である。

共振器内の離散化を変え、 $N_x = N_y = 20 \sim 80$ までとしたときの観測点における 19 周期目の最大振幅を計測した時間を図 13 に示す。数値計算結果より、セル数を増加させると両手法とも最大振幅を観測する時刻が一定値に漸近してゆく様子が分かる。離散化を細かくすることにより数値分散が小さくなり、真値に近くなってゆくためである。また、CIP-BS 法では FDTD 法に比べ、位相は粗い離散化でも真値からは離れておらず、位相誤差が少ないことが分かる。

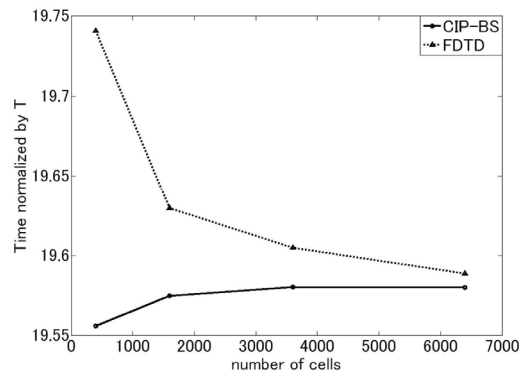


図 13. 基準周期を得る時刻のセルサイズ依存性

4-4 一方向伝搬型の吸収境界条件

CIP-BS 法では隣接する基底関数との内積は直交していないため、解析領域端では吸収境界条件を考慮する必要がある。ここでは一方向伝搬型の吸収境界条件について検討する。時刻 $t = n \Delta t$ における場は基底関数展開によって与えられる。解析領域端で、場が速度 c_0 で外側に伝搬しているとき、 Δt 後の $(0, j\Delta y)$ のグリッドの場は $(c_0 \Delta t, j\Delta y)$ と等しい。そこでこの条件を解析領域端に課すことで吸収境界条件が実装できる。

提案した吸収境界条件の特性を数値計算により評価する。図 14 のように、電流源から吸収境界を經由して伝搬した振幅を各観測点で計測し、その観測点までと同じ距離、かつ同じグリッドの伝搬角度を持つ点を参照点として計測して、その比から反射係数を導出する。多数の観測点を同時観測することで、反射係数の角度特性が導出できる。図 15 は提案した吸収境界条件の角度特性である。参考のため、FDTD 法における Mur の吸収境界の特性 (“FDTD”) もプロットしている。この図より、提案した手法は Mur の吸収境界程度の特性を有していることが確認できる。

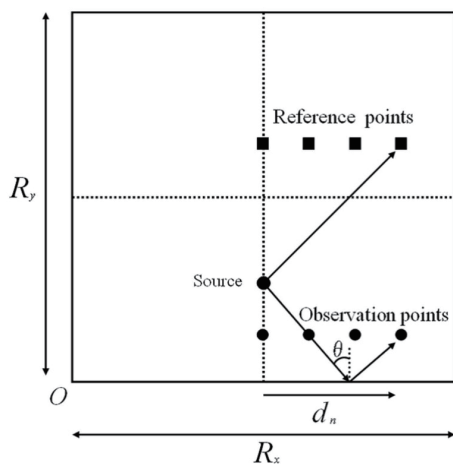


図 14. 反射係数の計測する領域の構造

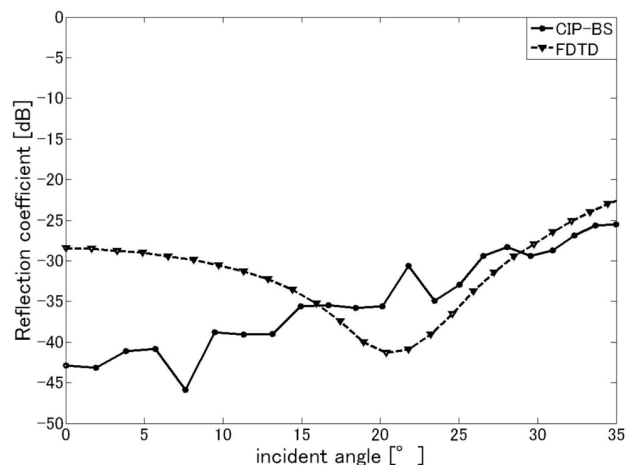


図 15. 反射係数の入射角依存性

5 むすび

CIP 法を汎用数値電磁界解析手法へと完成させるための各種個別技術の開発について報告した。開発した TF/SF 境界で任意入射波を伝搬させることに成功し、散乱問題への適用を報告した。また、基底関数 CIP 法を各種スキームに適用し、その動作について数値計算により性能評価を行った。多次元基底関数 CIP 法へと拡張し、矩形キャビティの TE_{202} 共振モードの解析、電流源の実装、吸収境界条件の開発を行った。

【参考文献】

- [1] Y. Ando, H. Saito, and M. Hayakawa, "A nearly perfect Total-Field/Scattered-Field boundary for the one-dimensional CIP method," IEICE Trans. Electron., vol. E91-C, no. 10, pp. 1677-1683, 2008.
- [2] 矢部, 内海, 尾形, CIP 法, 森北出版, 2003.
- [3] Y. Ando and M. Hayakawa, "Implementation of the perfect matched layer to the CIP method," IEICE Trans. Electron., vol. E89-C, no. 5, pp. 645-648, 2006.
- [4] K. Okubo, Y. Yoshida, and N. Takeuchi, "Analysis of an electromagnetic field created by line current using constrained interpolation profile method," IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 55, no. 1, pp. 111-119, 2007.
- [5] T. Utsumi, T. Yabe, T. Aoki, J. Koga, and M. Yamagiwa, "Solutions of hyperbolic equation with the CIP-BS method," JSME Int. J. B, vol. 4, no. 4, pp. 768-776, 2004.

〈発表資料〉

題名	掲載誌・学会名等	発表年月
Total-field/Scattered-field Boundary for Multi-dimensional CIP Method	PIERS2009	2009年8月
基底関数展開を用いた CIP 法による電磁界解析の検討	2010年電子情報通信学会総合大会	2010年3月
CIP-BS 法の電磁界解析への適用	平成22年電気学会全国大会	2010年3月
CIP-BS method for solving Maxwell's equations	PIERS2010	2010年7月
CIP-BS Method for Solving Maxwell's Equations	AP-RASC'10	2010年9月
2次元 CIP 基底関数法による電磁界解析	平成23年電気学会全国大会	2011年3月