

点列データの相関を利用した効率的な情報圧縮法の開発

代表研究者

藤 ノ 木 健 介

東海大学理学部情報数理学科 准教授

共同研究者

芦 澤 恵 太

舞鶴工業高等専門学校電気情報工学科 教授

1 はじめに

近代社会における ICT の普及・発展や計算技術の進歩などにより、大量のデータを高速に処理する必要性が高まっている。それに伴いデータの複雑化・高次元化も急速に進んでおり、効率的なデータ処理・抽出・圧縮手法の開発が急務となっている。一方で、信号処理分野にはこれらの問題解決の糸口となりうる優れた手法が数多く存在するが、信号（データ）のサンプル間の対応や相関をどちらかという周波数解析という立場から捉えることがこれまでの主流であった。この周波数ベースのアプローチは強力であるものの、フーリエ解析の上で成り立つものであり、上記の複雑化・高次元化した信号解析においては必ずしもフーリエ解析が活躍するとは限らず、状況によっては有利とは言えない。

そこで本研究では、信号を点の集まりという点列データとみなし、点列データ間の相関を周波数領域ではなく実空間領域で探ることによって、広範な信号を包括的に扱うデータ処理法の開発を目指すことを目的とする。その基礎検討として、まずは平面上において規則的にサンプリングされた 2 次元信号である画像を対象として取り組み、平面のみならず曲面上にも拡張可能なデータ解析手法の開発を試みたので、本稿ではこの成果を中心に報告する。まず第 2 節で本研究と関連する画像処理とその周辺における背景について触れる。第 3 節で本研究の位置付けを確認した後、第 4 節と第 5 節で提案手法とその数値実験結果を紹介し、その有効性を示す。

2 関連研究

1990 年代後半の神経心理学での研究において、人間の脳による自然画像の効率的な認識処理には、興味深いことに神経細胞の指向性感度が重要であるということが報告されている [13]。一方で画像処理における指向性の重要性については、応用数学および電気工学の双方の分野、特に応用調和解析および信号処理においても、画像の効率的表現に関する研究が長い年月をかけて従来より行われてきた。その 1 つの例として、ウェーブレット解析が挙げられる。ウェーブレットは信号の時間周波数解析や疎表現（スパース表現）などを与える数学的な道具である。数学的に厳密な議論ができる一方で、画像処理などで実社会に広く応用されているという特徴があり、純粋数学者と工学者の協働によって研究が発展してきた経緯がある [15, 12]。しかし、ふつうのウェーブレット解析は本質的に 1 次元で展開される理論であり、画像などの多変数データを扱う場合は、方位選択性の欠如という問題が生じ、これが応用上障害になることが知られている。この問題はウェーブレット解析と深く関連する信号処理におけるフィルタバンクの分野でも初期の頃から認識されており、指向性を有するアプローチがいくつか提案されてきた [14, 2, 10, 1, 9]。しかしながら、これらは本質的な多次元化となっておらず、方位選択性に優れた方法ではあるものの、計算手順の複雑さや計算コストが高いという問題があることは否定できない。

そこで、本質的な 2 次元化を図った手法が 2000 年前後になると登場するようになった [3, 11, 5]。これらの研究に共通するアイディアは、優れた方位選択性を有するような基底関数を周波数領域で設計するために、冗長性を許すという点にある。基底関数が冗長であるということは、ある適当なベクトル空間における正規直交基底に代表されるような一次独立なものではなく、一次従属となっているものである。これは数学的にはフレームとよばれる枠組みとして体系化されている [6]。フレームは正規直交基底の条件を緩めたものであり、正規直交基底自体がフレームの特別な形である。したがって両者は互いに類似した性質を持ち合わせているため、正規直交基底の持つ意義がフレームでも発揮される。例えば正規直交基底の場合は、基底となるベクトル空間に属する任意の関数は、その基底の一次結合で展開できるが、その際の展開係数が関数と基底の内積によって計算できるという応用上好ましい性質を持っている。フレームの場合も同様のことが成り立つ。フレームの歴史は案外古く、解析学における調和解析の分野で 20 世紀半ば頃にすでに提案されていた概念だが、その当時は正規直交基底が隆盛を極めており、しばらく注目されることはなかった。しかし、80 年代から 90 年代にかけて、ドーベシーらの数学者がウェーブレットの研究 [4] の中でフレームに再びスポット

ライトを当てた影響もあって、近年では信号処理の分野も含めて比較的一般的になってきている概念である[8]。一般にフレームは冗長性を含んでいるので、データ解析に応用した時に正規直交基底を用いた場合よりも計算コストが増えてしまう側面があるが、その冗長性のおかげで通常の一次独立な基底（直交基底、双直交基底など）よりもはるかに優れた方位選択性を実現できることが知られているしたがって計算コストよりも方位選択性を優先することで、画像の特徴抽出や圧縮、ノイズ除去などの様々な画像処理の場面に適したより柔軟な変換を構成できることが期待できる。

3 本研究の位置付け

一方で、上記で述べたこれらの手法はすべて周波数領域からのアプローチであり、規則的にサンプリングされた画像データなどをターゲットにしているため、本研究が目指すような点列データ解析には必ずしも適しているとは言えない。そこで本研究では、周波数領域ではなく実空間領域からのアプローチという立場で、周波数という概念が定義しにくい曲面などの領域の信号などにも拡張でき、様々な場面で実装可能な手法の開発を目指す。具体的には、方位選択性と計算コストのトレードオフから、重複を許した効率的なウェーブレット変換を空間領域で設計する。提案法では、まず従来の古典的信号処理で用いられる信号のポリフェーズ分解[12]に制限付き冗長性を付加する。この冗長ポリフェーズ分解によって生じた冗長性を、リフティングスキーム[16, 17]とよばれる離散ウェーブレット変換の柔軟な実装法に組み入れる。その結果、計算コストを抑えつつ方位選択性を従来の3方位から6方位（約30°毎）または12方位（約15°毎）まで拡張する重複変換の設計が可能となる。したがって提案法は扱うデータや場面によって、最適な方位分解能を選択できる自由度を有しているといえる。以下では、2次元正方格子上に定義された画像信号に対して、提案する重複変換を実現する効率的なアルゴリズムを示し、画像のエッジ検出と圧縮に対する数値実験を行うことで提案法の妥当性を示す。

4 提案法

2次元ベクトル $t \in \mathbb{Z}^2$ ($t_0 = 0$) を画像の画素値のインデックスとする。2次元正方格子上に定義されている画像に対して、その画素値の列を $\{c_j[t]\}_{t \in \mathbb{Z}^2}$ で表す。ここで $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ は解像度レベルである。 $\xi \in \mathbb{R}^2$ として、画像信号 $\{c_j[t]\}_{t \in \mathbb{Z}^2}$ に対する次の 2π 周期関数 $\hat{c}_j(\xi) = \sum_{t \in \mathbb{Z}^2} c_j[t] e^{-i\xi \cdot t}$ を定め、信号のポリフェーズ分解を

$$\hat{c}_{m,j}(\xi) := \sum_{t \in \mathbb{Z}^2} c_j[2t + t_m] e^{-i\xi \cdot t}, \quad m = 0, 1, 2, 3 \quad (1)$$

で定義する。ここで、一次独立な2次元ベクトルを $t_1 = (1 \ 0)^T$, $t_2 = (0 \ 1)^T$ と選び、さらに $t_3 \in \{t_1 + t_2, -t_1 + t_2, t_1 - t_2, -t_1 - t_2\}$ と取れば、等式

$$\hat{c}_j(\xi) = \sum_{m=0}^3 \hat{c}_{m,j}(2\xi) e^{-i\xi \cdot t_m} \quad (2)$$

が成り立つ。これを信号のポリフェーズ表現とよび、右辺の周期関数列 $\{\hat{c}_{m,j}\}_{m=0}^3$ を信号 $\{c_j[t]\}_{t \in \mathbb{Z}^2}$ のポリフェーズ成分という。

等式(2)は、信号を4つの独立な成分として表現できることを意味している。1次元の場合は、例えば信号 $\{c_j[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ を2で間引いた場合、偶数成分 $\{c_j[2k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ と奇数成分 $\{c_j[2k+1]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ の2つの独立な成分が考えられるが、2次元の場合には方位性が生じるため、一般化すると上記のように4つの成分が考えられる。ポリフェーズ成分 $\{\hat{c}_{m,j}\}_{m=0}^3$ において、 $m=0$ の場合は、空間領域において横方向と縦方向のインデックスが両方偶数を取り、1次元信号での偶数成分に対応する。 $m \neq 0$ の場合は、信号を t_m ($m=1, 2, 3$) 方向へ平行移動した奇数成分と偶数成分の組み合わせ、つまり方位成分と解釈することができ、1次元の場合の奇数成分に対応する[7]。その方位成分を $N=6$ もしくは $N=12$ まで拡張するために、角度 $\theta \approx (180(d-1)/N)^\circ$, $d \in D := \{\ell \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq \ell \leq N\}$ を表す格子点上の2次元ベクトル $\{s_m \in \mathbb{Z}^2\}_{m=0}^N$ を導入する。 $N=12$ の場合は $s_1 = t_1$, $s_2 = 3t_1 + t_2$, $s_3 = 2t_1 + t_2$, $s_4 = t_1 + t_2$, $s_5 = t_1 + 2t_2$, $s_6 = t_1 + 3t_2$, $s_7 = t_2$ として、残りの $\{s_m\}_{m=8}^N$ も同様に定義する。なお $s_0 = t_0 = 0$ である。

次に信号 $\{c_j[\mathbf{t}]\}_{\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^2}$ に対して、ポリフェーズ分解 (1) を拡張して重複を許した冗長ポリフェーズ分解

$$\hat{c}_{m,j}(\boldsymbol{\xi}) := \sum_{\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^2} c_j[2\mathbf{t} + \mathbf{s}_m] e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{t}}, \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (3)$$

を定める．ここで、等式 (2) のポリフェーズ表現を方位成分 $N = 12$ の場合で考えると、格子の周期性によって冗長項が生じることに注意しよう．この場合、関数列 $\{\hat{c}_{m,j}\}_{m=0}^N$ は独立な成分とはならないが、しかし $m \neq 0$ の各成分は約 $(15(d-1))^\circ$, $d \in D$ に対応する様な $N = 12$ 方位の情報を含んでいるといえる．

格子上に定義された信号 $\{c_j[\mathbf{t}]\}_{\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^2}$ に対する離散ウェーブレット変換は、ポリフェーズ分解 (1) で得たポリフェーズ成分 $\{\hat{c}_{m,j}\}_{m=0}^3$ に対して、リフティングスキームを適用することによって実装することができる [18]．この場合の方位選択性は $N = 3$ である．本研究では、冗長ポリフェーズ分解 (3) によって得た $(N+1)$ 個のポリフェーズ成分 $\{\hat{c}_{m,j}\}_{m=0}^N$ の冗長性をリフティングスキームでも考慮することにより、方位選択性を最大 $N = 12$ まで拡張した重複変換を実現する．具体的には、冗長ポリフェーズ分解 (3) で得た $(N+1)$ 個のポリフェーズ成分に対してリフティングスキームを拡張しながら適用する．そのためにまずリフティングに用いられるたたみ込み作用素である、予測作用素（リフティング作用素） $\{\mathcal{P}_k\}_{k \in D}$ と更新作用素（双対リフティング作用素） $\{\mathcal{U}_k\}_{k \in D}$ を以下で定義する：

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_k a)[\mathbf{t}] &:= \sum_{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2} p_k[\mathbf{v}] a[\mathbf{t} - \mathbf{v}], \\ (\mathcal{U}_k a)[\mathbf{t}] &:= \sum_{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2} u_k[\mathbf{v}] a[\mathbf{t} - \mathbf{v}]. \end{aligned}$$

ここで、数列 $\{p_k[\mathbf{v}] \in \mathbb{R} \mid k \in D, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2\}$ は予測フィルタ、 $\{u_k[\mathbf{v}] \in \mathbb{R} \mid k \in D, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2\}$ は更新フィルタとよばれる．次に、以下のステップからなるリフティングスキームによって変換を構成する．

1. 信号 $c_j[\mathbf{t}]$ を各フェーズ成分に分解する：

$$\begin{aligned} c_{0,j}[\mathbf{t}] &:= c_j[2\mathbf{t}], \\ c_{k,j}[\mathbf{t}] &:= c_j[2\mathbf{t} + \mathbf{s}_k], \quad k \in D. \end{aligned}$$

2. 予測作用素 $\{\mathcal{P}_k\}_{k \in D}$ により信号の偶数成分と詳細成分の相関を予測し、 N 個の詳細成分 $\{d_{k,j-1}[\mathbf{t}]\}_{k \in D}$ を計算する：

$$d_{k,j-1}[\mathbf{t}] = c_{k,j}[\mathbf{t}] - (\mathcal{P}_k c_{0,j})[\mathbf{t}], \quad k \in D.$$

3. 更新作用素 $\{\mathcal{U}_k\}_{k \in D}$ により近似成分 $c_{j-1}[\mathbf{t}]$ を計算する：

$$c_{j-1}[\mathbf{t}] = c_{0,j}[\mathbf{t}] + \sum_{k \in D} (\mathcal{U}_k d_{k,j-1})[\mathbf{t}].$$

4. ノルムの正規化のために、 $\{c_{j-1}[\mathbf{t}], d_{k,j-1}[\mathbf{t}]\}_{k \in D}$ に対して定数 K によりスケーリングを行う：

$$\begin{aligned} c_{j-1}[\mathbf{t}] &= K c_{j-1}[\mathbf{t}], \\ d_{k,j-1}[\mathbf{t}] &= K^{-1} d_{k,j-1}[\mathbf{t}]. \end{aligned}$$

以上のステップは任意の分解レベル $J \geq 1$ 回（ステップ 2. と 3. は n 回）繰り返すことができる．これらのステップを実行することで、平均成分 $c_{j-J}[\mathbf{t}]$ と D 個の方位情報を含む詳細成分 $\{d_{k,j-J}[\mathbf{t}] \mid k \in D, L < j < J\}$ を得る．

信号の再構成には次のステップを用いる．

1. 再スケーリングを行う：

$$\begin{aligned} c_{j-1}[\mathbf{t}] &= K^{-1} c_{j-1}[\mathbf{t}], \\ d_{k,j-1}[\mathbf{t}] &= K d_{k,j-1}[\mathbf{t}]. \end{aligned}$$

Algorithm 1 Forward lifting

Input: $c_j[t]$: signal, L : resolution level, J : decomposition level.

Require: $L \geq J$, $J \geq 1$

```
1: for  $j \leftarrow L$  to  $L - J + 1$  do
2:    $c_{j-1}^{(0)}[t] \leftarrow c_j[2t]$ 
3:    $d_{k,j-1}^{(0)}[t] \leftarrow c_j[2t + \mathbf{s}_k]$ ,  $k \in D$ 
4:   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
5:      $d_{k,j-1}^{(i)}[t] \leftarrow d_{k,j-1}^{(i-1)}[t] - \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2} p_k^{(i)}[\mathbf{u}] c_{j-1}^{(i-1)}[t - \mathbf{u}]$ ,  $k \in D$ 
6:      $c_{j-1}^{(i)}[t] \leftarrow c_{j-1}^{(i-1)}[t] + \sum_{k \in D} \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2} u_k^{(i)}[\mathbf{u}] d_{k,j-1}^{(i)}[t - \mathbf{u}]$ 
7:   end for
8:    $c_{j-1}[t] \leftarrow K c_{j-1}^{(n)}[t]$ 
9:    $d_{k,j-1}[t] \leftarrow 1/K d_{k,j-1}^{(n)}[t]$ ,  $k \in D$ 
10: end for
```



図1 提案手法の周波数特性.

2. 偶数成分 $c_{0,j}[t]$ を再構成する :

$$c_{0,j}[t] = c_{j-1}[t] - \sum_{k \in D} (\mathcal{U}_k d_{k,j-1})[t].$$

3. 奇数成分 $\{c_{k_i,j}[t]\}_{i=1,2,3}$ を再構成する :

$$c_{k_i,j}[t] = d_{k_i,j-1}[t] + (\mathcal{P}_{k_i} c_{0,j})[t], \quad k_i \in D_i,$$

$$D_1 := \{4\ell + 1 \mid 0 \leq \ell < N/4\},$$

$$D_2 := \{4\ell + 3 \mid 0 \leq \ell < N/4\},$$

$$D_3 := \{2\ell + 2 \mid 0 \leq \ell < N/2\}.$$

4. $c_{0,j}[t]$ と $c_{k_i,j}[t]$, $i = 1, 2, 3$ を合成して, $c_j[t]$ を再構成する.

冗長性と周期性により, ステップ 3. における k_i の取り方は信号の再構成に影響を与えないことに注意しよう. リフティングスキームを用いた変換を, 通常の離散ウェーブレット変換として実装する際の手順をそれぞれ Algorithm 1 と Algorithm 2 に示す. この実装方法を通常のフィルタ処理による変換と解釈した場合の周波数特性の一例を図 1 に示す. 各方位ベクトル $\{\mathbf{s}_m\}_{m=0}^N$ に対応する指向特性を有するフィルタを, 意図通りに設計できていることが図から確認できる.

従来の方位選択性 $N = 3$ の冗長ウェーブレット変換である定常ウェーブレット変換の冗長性は $3J + 1$ である. これに対して, 本手法は方位選択性を $N = 12$ まで拡張しながら冗長性を $(N \times J + 1)/4$ に制限している. このため, 計算量と方位分解能の意味で効率的な変換になっている. 一方で $N = 6$ とすれば, 冗長性をさらに低減させながら約 $(30(d-1))^\circ$, $d \in D$ の一様な 6 方位の詳細成分を得ることができる. したがって, 本手法は冗長性と方向分解能のトレードオフを考慮しながら, 選択的に方位性を定められる利点があるといえる.

Algorithm 2 Backward lifting

```

1: for  $j = L - J + 1$  to  $L$  do
2:    $c_{j-1}^{(n)}[t] \leftarrow 1/K c_{j-1}[t]$ 
3:    $d_{k,j-1}^{(n)}[t] \leftarrow K d_{k,j-1}[t], \quad k \in D$ 
4:   for  $i \leftarrow n$  to 1 do
5:      $c_{j-1}^{(i-1)}[t] \leftarrow c_{j-1}^{(i)}[t] - \sum_{k \in D} \sum_{u \in \mathbb{Z}^2} u_k^{(i)}[u] d_{k,j-1}^{(i)}[t-u]$ 
6:      $d_{k,j-1}^{(i-1)}[t] \leftarrow d_{k,j-1}^{(i)}[t] + \sum_{u \in \mathbb{Z}^2} p_k^{(i)}[u] c_{j-1}^{(i-1)}[t-u], \quad k \in D$ 
7:   end for
8:    $c_j[2t] \leftarrow c_{j-1}^{(0)}[t]$ 
9:    $c_j[2t + t_1] \leftarrow \text{select } d_{k,j-1}^{(0)}[t] \text{ with } k \in \{1, 5, 9\}$ 
10:   $c_j[2t + t_2] \leftarrow \text{select } d_{k,j-1}^{(0)}[t] \text{ with } k \in \{3, 7, 11\}$ 
11:   $c_j[2t + t_3] \leftarrow \text{select } d_{k,j-1}^{(0)}[t] \text{ with } k \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ 
12: end for
  
```

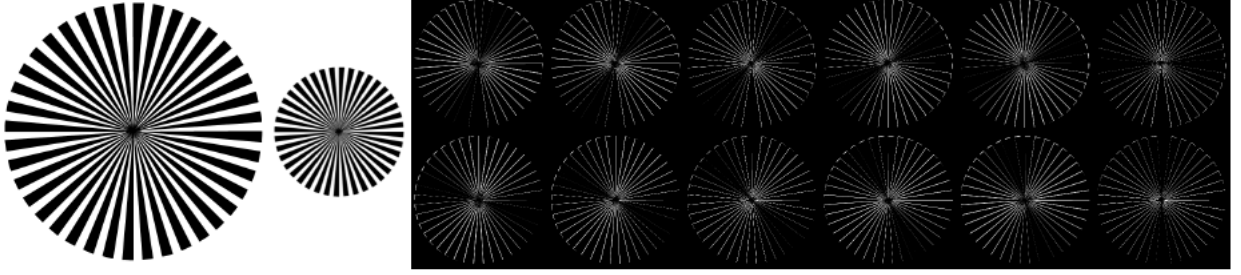


図2 原画像 $\{c_j[t]\}_{t \in \mathbb{Z}^2}$, 近似成分 $\{c_{j-1}[t]\}_{t \in \mathbb{Z}^2}$, 詳細成分 $\{d_{k,j-1}[t]\}_{t \in \mathbb{Z}^2, k \in D}$ (上段: $k = 6, \dots, 1$. 下段: $k = 12, \dots, 7$.)

5 数値実験

いくつかの画像信号 $\{c_j[t]\}_{t \in \mathbb{Z}^2}$ に対して, Algorithm 1 を 1 回適用することで得られた分解画像 $\{c_{j-1}[t], d_{k,j-1}[t]\}_{t \in \mathbb{Z}^2, k \in D}$ を図 2 に示す. 解像度レベルは $j = 9$ であり, 方位選択性は $N = 12$ である. 作用素 $\{\mathcal{P}_k\}_{k \in D}$ および $\{\mathcal{U}_k\}_{k \in D}$ の設計には, ここでは簡単のため, 各ベクトル $\{s_k\}_{k \in D}$ 方向への一様な Haar 変換となるように次のように設定した:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}_k c_{0,j-1})[t] &= c_{0,j-1}[t], \quad k \in D, \\
 (\mathcal{U}_k d_{k,j-1})[t] &= \begin{cases} d_{k,j-1}[t]/12, & \text{if } k \in D_1, \\ d_{k,j-1}[t]/12, & \text{if } k \in D_2, \\ d_{k,j-1}[t]/24, & \text{if } k \in D_3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

図 2 より, N 個の詳細成分 $\{d_{k,j-1}[t]\}_{t \in \mathbb{Z}^2, k \in D}$ がそれぞれ $\{s_k\}_{k \in D}$ 方向のエッジ成分に対応していることが確認できる. さらに, Algorithm 2 を用いて分解画像の詳細成分 $\{d_{k,j-1}[t]\}_{t \in \mathbb{Z}^2, k \in D}$ のみから画像を再構成した結果を図 3 に示す. 比較対象として, 従来の離散ウェーブレット変換と二重木複素ウェーブレット変換 (DTCWT) [9] の結果もあわせて示す. 信号と各変換が持つ性質との相性もあるが, 提案法は鮮明にエッジを抽出できていることが確認できる. このことは, 提案法が限られた冗長性の中で一様な方向解析が可能とすることを示している. 図 4 に示す 2 値化処理を行った画像の例では, より結果が鮮明に表れている.

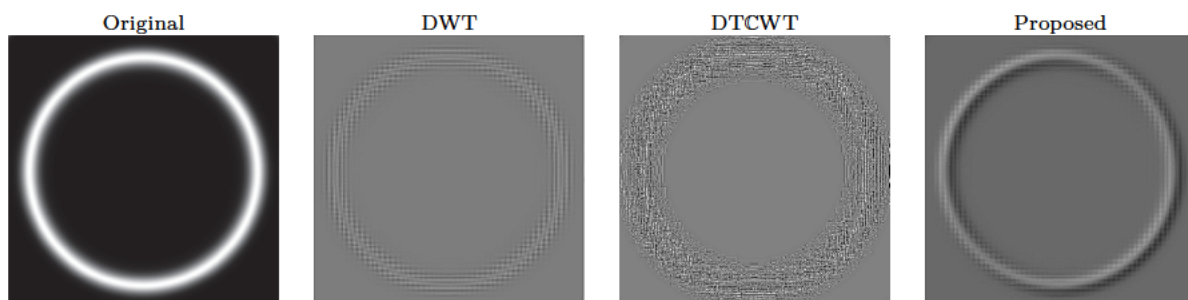


図3 エッジ抽出結果.



図4 エッジ抽出結果 (左：従来法, 右：提案法)

また本手法は、方位ベクトルの組み合わせを変更することによって、分析したい信号の方位成分に適した信号分解ができる拡張性も有している．この特徴は画像圧縮（非線形近似）にも利用でき、方位成分の再現に特化した画像圧縮が可能となる．図5に Haar の場合の結果を示す．これらは展開後の1%の係数から再構成した画像である．左図の従来の Haar 変換では、ブロック状のノイズが認められるが、右図における提案法ではこのブロックノイズに指向性が表れていることに着目する．この性質を利用すれば、例えば図6のような、画像に含まれる方位成分がわかりやすいテクスチャ画像に対して、所望する方位成分の相関を抽出して利用することで、良好な圧縮結果を得ることができる．

6 おわりに

本研究では、方位選択性を改善した重複変換の空間領域での設計法を提案し、画像に対する数値実験によりその妥当性を示した．提案法は計算コストと方位分解能のトレードオフという意味で従来法よりも効率的で優れており、空間領域におけるデータの相関を利用することで、より一般的で複雑なデータ処理にも拡張可能であることが期待できる．本稿ではエッジの一樣抽出を意図した応用例を扱ったが、重複変換における各作用素の設計において方位毎に異なる性質を持った作用素を用いることで、変換に異方性を持たせることも可能である．今後はこうした方面へのさらなる取り組みを含め、より複雑なデータ解析に対する検討が課題となる．



図 5 圧縮結果 (左：従来法, 右：提案法)

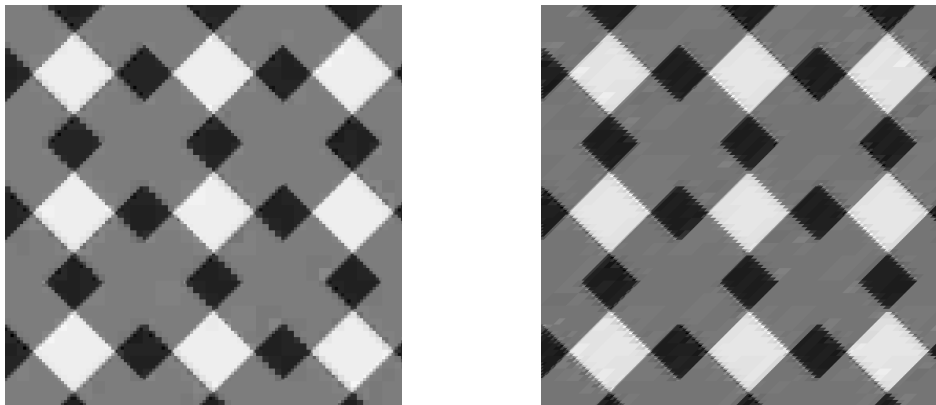


図 6 圧縮結果 (左：従来法, 右：提案法)

参考文献

- [1] J. Antoine, P. Carrette, R. Murenzi, and B. Piette, Image analysis with two-dimensional continuous wavelet transform, *Signal Process.*, **31** (1993), 241–272.
- [2] R. Bamberger and M. Smith, A filter bank for the directional decomposition of images: theory and design, *IEEE Trans. Signal Process.*, **40** (1992), 882–893.
- [3] E. Candès and D. Donoho, New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise C^2 singularities, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **56** (2004), 216–266.
- [4] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Regional Conf. Series in Appl. Math., SIAM,

Philadelphia, 1992.

- [5] M. Do and M. Vetterli, The contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation, *IEEE Trans. Image Process.*, **14** (2005), 2091–2106.
- [6] R. Duffin and A. Schaeffer, A class of nonharmonic Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 341–366.
- [7] K. Fujinoki and O. Vasilyev, Triangular wavelets: an isotropic image representation with hexagonal symmetry, *EURASIP Journal on Image and Video Processing*, **2009** (2009), 1–16.
- [8] C. Heil, WHAT IS ... a Frame? *Notices of the American Mathematical Society*, **60** (2013), 1–3.
- [9] N. Kingsbury, Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **10** (2001), 234–253.
- [10] J. Kovačević and M. Vetterli, Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for $\mathbb{R}^n$, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **38** (1992), 533–555.
- [11] D. Labate, W. Lim, G. Kutyniok, and G. Weiss, Sparse multidimensional representation using shearlets, in *Wavelets XI*, edited by M. Papadakis, A. F. Laine, and M. A. Unser, *SPIE Proc. 5914* (2005), SPIE, Bellingham, WA, 254–262, 2005.
- [12] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, 3rd ed., Academic Press, 2008.
- [13] B. Olshausen and D. Field, Emergence of simple-cell receptive field properties by learning a sparse code for natural images, *Nature*, **381** (1996), 607–609.
- [14] E. Simoncelli, W. Freeman, E. Adelson, and D. Heeger, Shiftable multiscale transforms, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **38** (1992), 587–607.
- [15] G. Strang and T. Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [16] W. Sweldens, The lifting scheme: a custom-design construction of biorthogonal wavelets, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **3** (1996), 186–200.
- [17] W. Sweldens, The lifting scheme: a construction of second generation wavelets, *SIAM J. Math. Analysis*, **29** (1997), 511–546.
- [18] W. Sweldens and P. Schröder, Building your own wavelets at home, *ACM SIGGRAPH course notes*, 1996.

〈発 表 資 料〉

題 名	掲載誌・学会名等	発表年月
A Note on Curvelets and Multiscale Directional Transforms	京都大学数理解析研究所講究録	2019 年 2 月
Directional Lifting-based Wavelet Transforms and their Applications	The Ninth International Conference on Information	2018 年 12 月
2 変数関数の時間周波数解析について	釧路高専第 8 回若手理・工学セミナー	2018 年 8 月
リフティングスキームによるウェーブレットの構成法	日本応用数理学会論文誌	2018 年 6 月
Multi-Lapped Directional Wavelet Transforms and Their Applications to Image Analysis	Advanced Innovation powered by Mathematics Platform, “Signal Analysis and Time-Frequency Analysis”	2017 年 10 月
Haar Wavelet Decompositions on Spherical Sound Fields	The 12th International Conference on Innovative Computing, Information and Control	2017 年 8 月
A Two-dimensional Lapped Directional Wavelet Transform with Directional Lifting	The 11th International Society for Analysis, its Applications and Computation Congress	2017 年 8 月
A Lapped Directional Wavelet Transform Based on B-Splines	The 14th International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition	2017 年 7 月