

混合モデルと多層浅水方程式による大規模ビジュアルシミュレーションシステムの開発

研究代表者

藤澤 誠

筑波大学 図書館情報メディア系 准教授

1 はじめに

自然現象を物理法則に基づいてコンピュータ内で再現する物理シミュレーション技術は、災害対策や製品設計だけでなく、映像制作やゲームをはじめとするエンターテインメント分野の CG アニメーションにおいても欠かせないものとなっている。特に近年はグラフィックス用のプロセッサ (GPU) の急激な発展もあり、リアルタイムでの実行性も向上している。物理シミュレーションの対象となる現象は破壊や爆発など多岐にわたるが、その中でも水や煙に代表される単一の種類の流体から構成される「単相流」などでは、複雑な形状変化や躍動的な流動の再現によって CG の没入感を飛躍的に向上させてきた。これらは過去数十年の研究の結果、多くの 3D ソフトウェアに機能が搭載されるなど実用化が進んでいる。

一方で、現実世界には、水中の気泡や土砂流れのように、複数の種類の流体から構成される「混相流」現象が数多く存在する。混相流は、各相の密度差による沈殿や浮遊、分離や拡散による色の変化など多彩な現象を示し、単相流以上に視覚的に強い印象を与えるため、CG で再現する重要性が極めて高い。そのため、CG 分野においてもレベルセット法を用いた二相流[1]や三相以上に対応した手法[2]、粒子法で多相流をシミュレーションする手法[3]、混合モデルを粒子法に適用した手法[4]など数多くの研究がある。しかし、海洋や湖のような大規模なシーン、あるいは複数の相や異なる状態が複雑に相互作用するシーンでは、空間を離散化するために莫大な数の計算点が必要となる。そのため計算量が大幅に増え、一般的な PC やゲームのようにインタラクティブ性が求められるアプリケーションにおいてリアルタイムに実行することは困難となっている。既存の流体計算コスト削減手法の大半は単相流のみを対象としており、高速な計算が可能かつ大規模なシーンに適用可能な混相流シミュレーション手法は未だ提案されていない。

本研究では、流体シミュレーションの基礎となっているナビエ・ストークス方程式を高き方向に積分することで得られる浅水方程式と、マルチレイヤー（多層構造）に基づく新しいシミュレーション手法により、この混相流シミュレーションの高速化および大規模化という課題を解決する。具体的には、非発散条件を満たしつつ慣性による分離や拡散による混和を再現できる「非発散混合モデル」と「多層浅水方程式」を統合した支配方程式を新たに導出する。浅水方程式は、流体を高き場として表現することで離散化に必要な計算点数を大幅に削減でき、海のような大規模なシーンにおいてこれまでも用いられてきた。しかし、従来の浅水方程式では速度や物理量の鉛直（高さ）方向の変化を扱えないという欠点があった。本手法では、高き場を複数の層に分割するマルチレイヤー構造を採用することで、水中における速度の相違によって発生する混和現象など、見た目に大きな影響を及ぼす鉛直方向の変化を的確に捉えることを可能にした。これにより、海洋に土砂が流れ込むシーンや、川や海で異なる種類もしくは異なる温度の水が混ざり合うといった複数の相が混合するようなシーンにも対応できる手法を開発し、浅水方程式を用いたシミュレーションの可能性を大きく広げることを目的としている。

この支配方程式を高速かつ安定に計算するため、本研究では特性曲線有限体積法を用いた数値計算手法を導入する。格子法やセミ・ラグランジュ法（特性曲線法）を組み合わせ、支配方程式を保存形から移流形に変形して計算を適用することで、高速計算性をある程度保ちながら、混相流の鉛直方向の変化や高い体積保存性を再現する。提案手法の有効性を検証するため、循環流やダムブレイクシーンにおける物質の密度差による沈殿などの視覚的評価を行うとともに、水質汚染や河川の海洋流入といった現実在即した大規模シーンを構築し、リアルタイムでの混相流シミュレーションが可能であることを定量的に確認する。

さらに、単純な 3 次元の離散化ではなく、シミュレーション空間やシミュレーションする物体をマルチレイヤー構造で表すという考え方は、流体シミュレーションのみならず、高速に様々なシミュレーションを行うことを可能にする汎用的な可能性を秘めている。本研究では、このマルチレイヤーの考え方を、音の伝播や燃焼などの別の物理現象にも応用できる可能性についてもあわせて示す。

2 提案手法

2-1 非発散混合モデル

提案法では、混相流が引き起こす多彩な現象の再現を可能とするために非発散混合モデルを用いる。非発散混合モデルに基づき、各相の混合物に対する相対速度を考慮することで、各相の密度差による沈澱や浮遊、分離や拡散による色の変化などの現象を再現できる。また、非発散混合モデルは混合物の速度に対して非発散条件が成り立つため、多層浅水方程式との統合が容易であり、統合によって導出した支配方程式の計算の際に非線形連立方程式を解く必要がないという利点がある。

一方、効率的な計算を可能とするために多層浅水方程式を用いる。多層浅水方程式に基づき、3次元的な流体を2次元空間上の高さ場として扱うことで、離散化に必要な計算点数を大幅に削減できる。また、多層浅水方程式は高さ場を複数の層に分割し、各層ごとに異なる速度を定義するため、水中における速度の鉛直方向変化を捉えることができる。単相流の場合、水中における速度の鉛直方向変化が視覚的に与える影響は少ないが、混相流の場合、水中における速度の鉛直方向変化によって相の分離や混和などの現象が発生し、視覚的な影響を及ぼす可能性があるため、速度の鉛直方向変化を捉えることは重要である。

混相流は複数の相から構成されているため、各相に対して質量保存則と運動量保存則が与えられる。 k 相の質量保存則と運動量保存則はそれぞれ以下の式で表される[4]。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k) = -\alpha_k \nabla p_k + \nabla \cdot (\alpha_k \boldsymbol{\tau}_k) + \alpha_k \rho_k \mathbf{g} + \mathbf{M}_k \quad (2)$$

ここで、 k は相を表す添字であり、 α_k 、 ρ_k 、 $\mathbf{u}_k$ 、 p_k 、 $\boldsymbol{\tau}_k$ 、 $\mathbf{M}_k$ はそれぞれ k 相の体積分率、密度、速度、圧力、粘性応力、相間の運動量交換項を表す。

混相流の質量保存則を表す式1には k 相の体積分率 α_k が含まれている。このため、混相流では各相の非圧縮性を仮定しても非発散条件は成り立たない。さらに、運動量保存に関する式2には、相間の運動量交換項 $\mathbf{M}_k$ が含まれている。この項は抗力や摩擦力による相間の相互作用を考慮するために用いられ、すべての相の組み合わせに対してこの項を決定する必要がある。混相流の支配方程式は単相流のものよりも複雑であるため、式1と式2を同時に計算することは困難であるため、混合モデルを用いてこれらの方程式を近似する方法が提案されている[3, 4]。しかし、混相流においては α_k が時空間で一定でない限り、非発散条件 $\nabla \cdot \mathbf{u}_k = 0$ は満たされないため、混合モデルにおける圧力の計算が問題となる。

そこで本研究では以下の非発散混合モデル[5]を用いる。

$$\frac{D\alpha_k}{Dt} = -\nabla \cdot (\alpha_k \mathbf{u}_{mk0}) + \nabla \cdot \nabla (D_m \alpha_k) \quad (3)$$

$$\mathbf{u}_{mk} = C_m \frac{\rho_k - \rho_m}{\rho_m} \left(\mathbf{g} - \frac{D\mathbf{u}_m}{Dt} \right) + \frac{D_m}{\alpha_k} \nabla \alpha_k \quad (4)$$

ここで、 m は混合物を表す添字である。 $\mathbf{u}_{mk0}$ は式(4)の右辺第1項を表し、この式は k 相の体積分率を更新する際に用いられる。 C_m は慣性による分離の強さを制御する係数であり、 D_m は拡散による混和の強さを制御する係数を表す。非発散混合モデルに基づき、各相のドリフト速度を考慮することで、各相の密度差による沈澱や浮遊、分離や拡散による色の変化などの現象を再現できる。また、非発散混合モデルでは混合物の速度に対して非発散条件が成り立つため、多層浅水方程式との統合が容易であり、統合によって導出した支配方程式の計算の際に非線形連立方程式を解く必要がないという利点がある。

2-2 多層浅水方程式と非発散混合モデルの統合

湖や海などの水域は水平方向に大きく広がっている一方で、その水深は水平方向に対して比較的浅く、鉛直方向の大きさは限られている。このように、水平方向の大きさに対して鉛直方向の大きさが十分に小さい系を浅水系と呼ぶ。浅水系では、非粘性を仮定した Navier-Stokes 方程式の鉛直成分を無次元化すると、圧力項や重力項に比べて他の項の大きさが無視できるほど小さいということが示せる。これにより、静水压平衡による近似($\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g$)が可能となる。そして、多層浅水方程式とは、浅水方程式を多層化した方程式であり、計算物理学分野において Audusse ら[6]によって提案された。多層浅水方程式では高さ場を複数の層に

分割し、各層ごとに速度を定義するため、速度の鉛直方向変化を捉えることができる。また、隣接する層間の相互作用を考慮することで、循環流のような浅水方程式では扱えない現象を再現できる。

多層浅水方程式系では、浅水系と同様に流体と地形は水平方向に無限遠方まで広がっており、水面は関数 $y = \eta_s(x, t)$ 、水底は関数 $y = \eta_b(x, t)$ 、水底から水面までの高さは $H(x, t)$ 、地形の高さは $B(x, t)$ で表されるとする。また、流体は L 層に分割されており、1層と $l+1$ 層の界面は関数 $y = \eta_{l+1/2}(x, t)$ 、 l 層の層厚は $h_l(x, t)$ で表されるとする。ここで、 l は層を表す添字であり、 $l+1/2$ は l 層と $l+1$ 層の界面を表す添字とする。

以下に本研究調査において導出した非発散混合モデルに基づく多層浅水方程式系を示す。

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(H \sum_{l=1}^L \beta_l u_{m,l} \right) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\beta_l H \rho_{m,l} u_{m,l}) + \frac{\partial}{\partial x} (\beta_l H \rho_{m,l} u_{m,l} u_{m,l} + \beta_l H p_{m,l}) = F_{m,l}^{momen} + F_{m,l}^{pres} + F_{m,l}^{visc} + F_{m,l}^{wind} + F_{m,l}^{fric} \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\beta_l H \alpha_{k,l}) + \frac{\partial}{\partial x} (\beta_l H \alpha_{k,l} u_{m,l}) = F_{k,l}^{vol} + F_{k,l}^{diff} \quad (7)$$

ここで、 β_l は第 l 層の分割割合を表す係数、 $F_{m,l}^{momen}$, $F_{m,l}^{pres}$, $F_{m,l}^{visc}$, $F_{m,l}^{wind}$, $F_{m,l}^{fric}$, $F_{k,l}^{vol}$, $F_{k,l}^{diff}$ はそれぞれ運動量、圧力、粘性、風力、摩擦、体積分率、拡散に関するソース項である。式(5)-(7)は2次元空間を仮定しているが、シミュレーションでは3次元空間に拡張した支配方程式を用いる。

2-3 特性曲線有限体積法を用いた計算

格子によって導出した支配方程式の離散化を行い、数値計算には特性曲線有限体積法[1]を用いた。特性曲線有限体積法は多層浅水方程式の数値計算に用いられており、本研究で導出する支配方程式も多層浅水方程式に基づいているため、この数値計算手法を適用することができた。図1に本研究における式(5)-(7)の計算の流れを示す。

特性曲線有限体積法では、図1に示すように中間値の予測とその修正の2段階に分けて、各計算格子における保存量の更新を行う。また、保存量の移流計算のために、格子境界上における $n+1/2$ ステップ目の流束を求める必要があるが、多層浅水方程式は、流束を計算する手法として Roe 法など流束ヤコビアンの実数固有値が必要となる手法を適用できないため、特性曲線法を用いて流束を計算した。

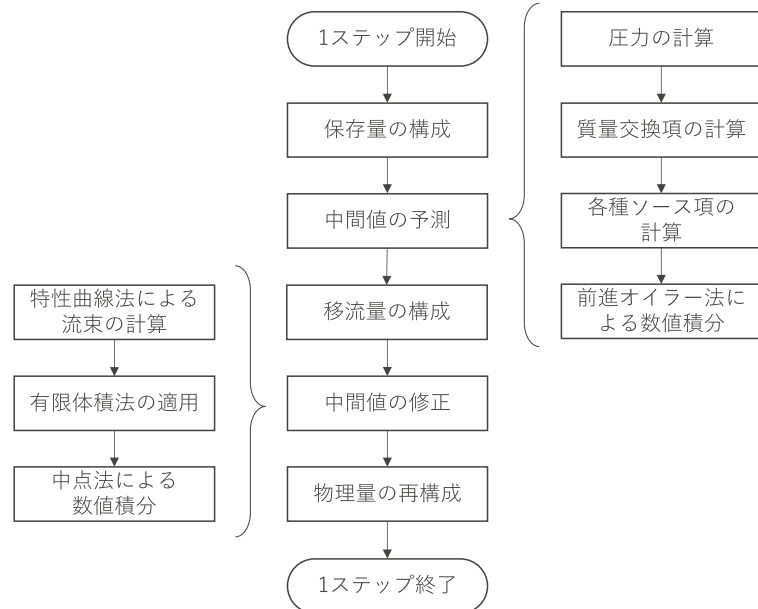


図1 特性曲線有限体積法による多層浅水方程式系の計算の流れ

3 レンダリングと実験結果

提案法による計算では各層における格子点での層の厚みや体積分率などの物理量が得られる。一般的な格子法と異なり、各計算格子は流れに合わせてその厚みを変化させるため、単純に体積分率に応じた3次元のボリュームデータとしてレンダリングすることはできない。高さ方向については格子の厚みが可変であるのに対して、水平方向については固定となっている。本研究ではこれを用いて、高さ方向についてサンプル点における値を1次元の線形補間で求め、それらのサンプルした点を用いて3次元補間を行うことで格子上にサンプリングされた3Dボリュームデータを生成した。ボリュームデータはOpenVDB形式で保存し、Blenderを用いてレンダリングを行った。

提案手法を実装し、いくつかのシーンを設定してシミュレーションした結果を示す。すべてのシーンにおいて共通のパラメータとして、 $\Delta t = 16.67[ms]$, $g = 9.81[m/s^2]$ を設定した。

図2に密度の異なる5相を正方形の領域内に配置し、その後の流れの変化を提案法で計算し、その結果をボリュームレンダリングした結果を示す。また、図3に内部の相の変化をわかりやすくするために断面をレンダリングした結果を示す。地形の高さは $B(x, z) = 2.5 + 0.003(x^2 + z^2)$ と設定した。初期速度と風速は与えず、粘性係数 μ は0.10に設定した。また、各相の密度比によって分離する現象を捉えるため、分離の強さを制御する係数 C_m を0.20に設定した。5つの密度の異なる流体が、その密度の違いにより流れを作り、最終的に密度の高い順に下から層を構成する様子が確認できる。このシーンでは、 100×100 の計算格子を用い、層の数として10層を設定した。1ステップあたりの平均計算時間は31.78 [ms]であり、約31fpsとCPUでの計算にもかかわらずリアルタイムでの計算を成し遂げた。

より大規模なシーンの例として、図4に水質汚濁シーンの結果を示す。有害物質を含んだ河川が湖へ流入することで、湖の水質汚染を引き起こすと想定し、シミュレーション空間の境界の一部分に流入境界条件を設定した。また、河川の流入によって発生した波が反射しないようにするため、その他の境界には流出境界条件を設定した。河川の体積分率は緑色の相と橙色の相をそれぞれ0.5ずつ含むように設定し、流入速度は5[m/s]とした。地形の高さは $B(x, z) = 7.5 + \frac{30}{1+e^{0.04x}}$ と設定した。このシーンでは、 250×250 の計算格子を用い、層の数として10層を設定した。1ステップあたりの平均計算時間は180.09 [ms]となった。約5.5fpsとリアルタイムとはならなかったが、従来の混相流シミュレーション手法を湖や海など大規模なシーンに適用しようとする、莫大な数の計算点数が必要となり、計算に非常に時間がかかってしまう。一方、提案手法は多層浅水方程式に基づいており、大規模なシーンにおいても少ない計算点数で効率的に混相流シミュレーションを行うことができた。

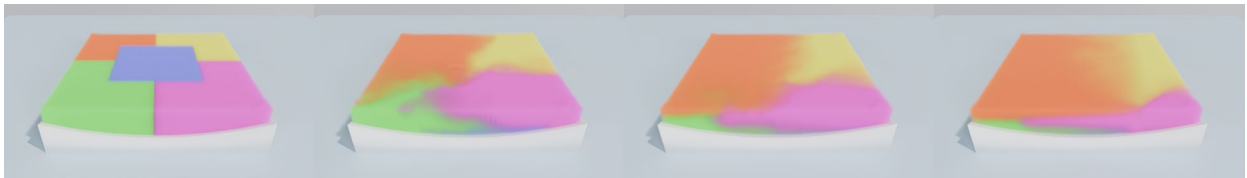


図2 5相流の実験結果(左から初期状態, 2000, 4000, 6000 ステップ)



図3 5相流の実験結果(断面図)

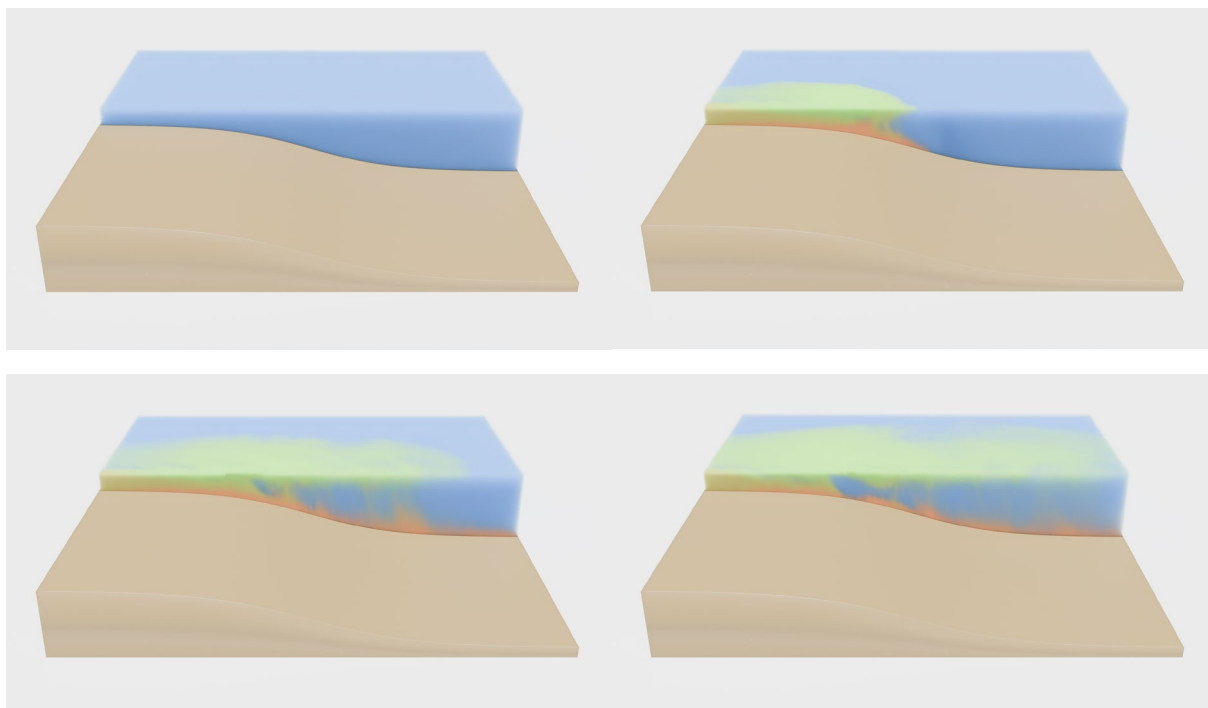


図 4 水質汚濁シートの結果(断面図, 左上から初期状態, 4000, 8000, 12000 ステップ)

4 マルチレイヤー計算の応用

3 次元の計算格子の代わりに多層(マルチレイヤー)構造の格子を用いることで、計算量を大幅に減少させ、かつ、安定した計算を可能にするという考え方は多相流以外にも応用が可能である。本研究では、マルチレイヤーの考え方を音の伝播シミュレーションと弾性体シミュレーションに応用している。音の伝播シミュレーションでは、大気温度差によって生じる音の屈折現象について、水平方向への温度変化が小さく、垂直方向への変化による影響がほとんどであると仮定することで、大気層と海中の層を含むマルチレイヤー構造によって屈折や水面で反射するようなシーンにおける音の伝播を高速に計算する手法を提案している。図 5 左に大気層での屈折と水面での反射を考慮した音の伝播経路の計算結果を示す。また、空間的な層だけでなく、計算手法をマルチレイヤーに分けて計算する手法も提案し、それにより、剛体と弾性体が熱によってシームレスに変化するようなシーンを従来法だと不安定になって振動するところを安定した計算を可能にした。この方法を用いて、線香のような細い物体が燃焼により灰になる現象をシミュレーションした結果を図 5 右に示す。このシミュレーションでは熱によって柔らかくなった部分を弾性体、元の線香や冷えた灰部分を剛体としてシミュレーションした。

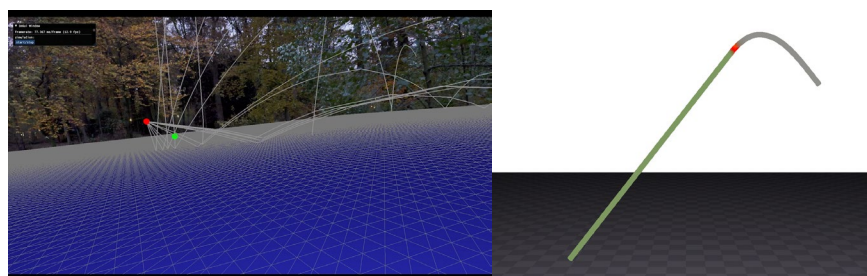


図 5 マルチレイヤーの応用例(左は大気中の音の伝播, 右は燃焼シミュレーション結果)

5 まとめ

本研究では混相流シミュレーションの高速化および大規模化を実現するため、非発散混合モデルと多層浅水方程式を統合し、導出した支配方程式に基づくシミュレーション手法を提案した。非発散混合モデルに基づき、各相の混合物に対する相対速度を考慮することで、密度比による沈殿や浮遊、分離や拡散による色の变化などの現象を再現した。また、多層浅水方程式に基づき、複数の層に分割された高さ場を用いることで、離散化に必要な計算点数を大幅に削減しつつ、水中での速度や各相の体積分率の変化を扱った。数値計算には特性曲線有限体積法を用い、有限体積法の計算の際に必要な格子境界上の数値流束を特性曲線法により構成した。また、厚みの異なる粒子について高速にボリュームデータを生成するために、1次元の線形補間を組合せた方法を開発し、Blenderなどの既存のレンダリングソフトで高品質のCGアニメーションを作成できることを確認した。

レンダリングを除く計算速度は従来の非発散混合モデルに基づく手法より高速であり、GPUを用いた並列計算は行っていないにもかかわらず、ほとんどのシーンでリアルタイム計算を可能とした。現状は並列計算は行っていないが、支配方程式はすべて陽的に計算可能であり、並列計算性は高いと考えられ、GPUによる並列計算を行うことで大規模な混相流のシーンであってもリアルタイムアプリケーションで扱うことができると考えられる。また、多層(マルチレイヤー)の考え方を音の伝播や燃焼シミュレーションに応用し、それぞれこれまでにない新しいシミュレーションを実現した。計算空間を複数のレイヤーに分けることで1つ1つのレイヤーでの計算の次元を落とすもしくは単純化することで、全体としての計算速度を向上させるという方法は他にも様々な応用が考えられ、この研究はCG分野におけるその第一歩となるものである。

【参考文献】

- [1] J. M. Hong and C. H. Kim, “Discontinuous Fluids,” ACM Transactions on Graphics, Vol.24, No.3, pp.915-920, 2005.
- [2] F. Losasso, T. Shinar, A. Selle, and R. Fedkiw, “Multiple Interacting Liquids,” ACM Transactions on Graphics, Vol.25, No.3, pp.812-819, 2006.
- [3] M. Muller, B. Solenthaler, R. Keiser, and m. Gross, “Particle-Based Fluid-Fluid Interaction,” In Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation, pp.237-244, 2005.
- [4] B. Ren, C. Li, X. Yan, M. C. Lin, J. Bonet, and S. M. Hu, “Multiple-Fluid SPH Simulation Using a Mixture Model,” ACM Transactions on Graphics, Vol.33, No.5, pp.171:1-11, 2014.
- [5] M. Manninen and V. Taivassalo, “On the Mixture Model for Multiphase Flow,” VTT Technical Research Centre of Finland, pp.288:1-67, 1996.
- [6] E. Audusse, M. O. Bristeau, M. Pelanti, and J. Sainte-Marie, “Approximation of The Hydrostatic Navier-Stokes System for Density Stratified Flows by A Multilayer Model: Kinetic Interpretation and Numerical Solution,” J. Comput. Phys, Vol.230, No.9, pp.3453-3478, 2011.

〈発表資料〉

題 名	掲載誌・学会名等	発表年月
An Efficient Method for Sound Propagation/Refraction with Water Surface Based on Gaussian Beam Tracing	Proceedings of the 9th IEEEJ International Conference on Image Electronics and Visual Computing (IEVC2026)	2026 年 3 月
Smoldering Simulation of Incense Burning Considering Ash Deformation	Proceedings of the 9th IEEEJ International Conference on Image Electronics and Visual Computing (IEVC2026)	2026 年 3 月