

位相シフトフリー M -相スペクトル拡散符号の最適設計とその応用

藤 崎 礼 志 金沢大学理工研究域講師

概要

本研究の目的は、ビット誤り生起確率に関して最適な $M(\geq 2)$ -相スペクトル拡散符号の最適設計とその応用である。そのためには、まず第一に、非同期スペクトル拡散多元接続 (SSMA:spread spectrum multiple access) 通信システムのビット誤り生起確率の精緻な理論評価式が必要である。本研究では、特に、大偏差原理 (LDP:large deviation principle) を用いて、拡散符号の周期長 N が短く、且つ、ユーザ数 J が少ない場合のビット誤り確率の理論評価式を求めた。実験値との比較を行ない、 $J/N < 1/10$ になると、中心極限定理 (CLT:central limit theorem) に基づく評価が妥当でなくなり、LDP で説明される漸近挙動が支配的となることを確認した。

以上の結果を含む、本研究代表者がこれまでに得た、ビット誤り生起確率の理論評価式に関する結果に基づき、従来のスペクトル拡散 2 値系列よりも、多元接続干渉 (MAI:multiple access interference) が原因で発生するビット誤り生起確率に関して、優れた特性を有する位相シフトに依存しない (位相シフトフリー) マルコフ連鎖から生成された 3 相スペクトル拡散系列の設計およびその M -相への一般化に成功した。同時に、最適な 4 相系列を具体的に構成した。

1 緒言

通信システム解析の重要な目的の一つとして、問題とするシステムに於けるビット誤り生起確率の理論評価式を得ることが挙げられる。得られた式は、できるだけ簡単な表現を有し、且つ、精緻であるのが望ましい。非同期スペクトル拡散多元接続 (SSMA:spread spectrum multiple access) 通信システムに対して、Pursley は、拡散符号を固定したとき、受信器出力に於ける平均信号対雑音比 (SN 比) を表す指標、平均干渉パラメータ (AIP:Average Interference Parameter) を定義し、AIP を分散とする標準正規分布を用いて、SS 通信システムのビット誤り生起確率の評価を行った [1]。これを AIP を分散とする標準 Gauss 近似 (SGA:standard Gaussian approximation) と呼ぶ。

同時に、Yao は、i) ユーザ数が少ないとき、ii) スペクトル拡散符号の周期が短いとき、iii) 外部雑音が大きいために、AIP を分散とする SGA は精緻でないことを指摘した [2]。このとき、次の問題が自然に生ずる：1) 何故、ユーザ数が少なく、拡散符号の周期長が短いとき、AIP を分散とする SGA は精緻でないのか？ 2) ユーザ数が少なく、拡散符号の周期長が短い場合にも、より実験に近い簡明なビット誤り生起確率の理論評価式を導出せよ。この問題は、多くの通信工学者により考えられ、多種の評価式が提案されている。しかしながら、ある評価式は組み合わせ論を用いて厳密ではあるものの、式が複雑であり、計算量がユーザ数、拡散符号の周期長に対して幾何級数的に爆発する、また、ある評価式は導出の物理的または理論的根拠が明確でない、等という問題があった (例えば、[3] を見られたい)。

一方、自己相関関数が指数関数的に減衰する、あるクラスのカオス $M(\geq 2)$ -相拡散符号は、AIP の期待値に関して、自己相関関数がデルタ関数的である Gold 符号に比べて、より良い特性を有することが報告された [4]。この発見は画期的であり、拡散符号の設計に革命的な変化をもたらした。実際、それまでは、通常、自己相関関数がデルタ関数的な系列が良い符号であると看做されていた。ここで、[4] で提案されたカオス M -相拡散符号は、区分線形 (PL:piecewise linear) マルコフ変換から生成された M -相複素拡散符号であり、 M -相系列とは、 $\left\{1, e^{\frac{1}{M}2\pi\sqrt{-1}}, e^{\frac{2}{M}2\pi\sqrt{-1}}, \dots, e^{\frac{M-1}{M}2\pi\sqrt{-1}}\right\}$ に値を取る複素系列のことである。また、[4] の PL マルコフ変換から得られる記号力学系は既約かつ非周期的マルコフ連鎖と等価であることが知られているので、拡散符号として、 M -状態マルコフ連鎖から生成された M -相系列を考えれば十分である。実際、既約かつ非周期的マルコフ連鎖列は [4] の系列を含む。以下、 M -状態マルコフ連鎖から生成された M -相拡散符号を、 M -相マルコフ連鎖拡散符号と略称する。

拡散符号が独立同分布 (i.i.d.:independent and identically distributed) 確率変数列の場合、非同期 SSMA 通信システムに於ける、ビット誤り生起確率の理論評価式に関して、多くの結果があるが (例えば、[5] を見られたい)、拡散符号がマルコフ連鎖の場合の結果は殆んど無い。

上記 Yao の問題及び [4] の結果に動機付けられ、我々は、 M -相マルコフ連鎖拡散符号を用いた、非同期 SSMA 通信システムの正規化された多元接続干渉 (MAI:multiple access interference) に対する中心極限定理 (CLT:central limit theorem) を証明した [6]. それを用いて独自のビット誤り生起確率の理論評価式 (CLT に基づく理論評価式とよぶ) を提案し、AIP を分散とする SGA は CLT に基づく理論評価式の 0 次近似式であることを示し、「AIP を分散とする SGA」の確率論的意味を明らかにした. CLT に基づく理論評価式はユーザ数に比例して多重積分となるという問題があったが、Taylor 展開を用いて CLT に基づく理論評価式の簡明な 3 次近似式を陽に求め、それがユーザ数 J が 3 の場合を除いて、拡散符号の周期長 N が短いとき、実験値に良く一致することを確認した [6]. これらの結果は、上記 Yao の問題 1) および 2) を部分的に解決する. しかしながら、Yao の問題を完全に解決するためには、 N に比べて非常に小さい J に対しては、CLT に基づく漸近挙動解析は無効となるので、大偏差原理 (LDP:large deviation principle) に基づく全く異なったアプローチが必要となることを指摘した [6].

本報告では、概要で述べた研究結果の内、未発表 (2008 年 3 月現在) の、LDP に基づくビット誤りの生起確率の評価に関する研究結果について述べる. これにより、上記 Yao の問題を完全に解決したことになる. MAI が原因で発生するビット誤りの生起確率に関して最適な、位相シフトに依存しない (位相シフトフリー) マルコフ連鎖 $M(\geq 3)$ -相スペクトル拡散系列の設計については、本研究の成果として、[7] で既に発表されているので詳細は [7] を見られたい.

本報告で述べる結果は、拡散符号が i.i.d. 確率変数列の場合を考えた Sadowsky と Bahr の結果 [5] の、拡散符号がマルコフ連鎖の場合への一般化である. すなわち、2 値 i.i.d. 拡散符号を含む、2 値マルコフ連鎖拡散符号を用いた非同期 SSMA 通信システムを考え、MAI の経験平均に対して LDP が成立することを証明し、割合関数 I を陽に与えた. ここで、LDP が与える割合関数 I は、指数関数的尺度で減衰するビット誤り生起確率の指数 I_N の、周期長 $N \rightarrow \infty$ のときの極限であるため、 N が有限の場合のビット誤りの生起確率を評価するとき、 I を直接的には用いることはできない事に注意されたい. そのため、LDP に基づくビット誤りの生起確率の、 N に関する漸近挙動の精密化を行った. 以上の結果を含む、本研究代表者がこれまでに得た、ビット誤り生起確率の理論評価式と実験値との比較を行なった. その結果、 $J/N < 1/10$ になると、CLT に基づく評価式よりも LDP に基づく評価式の方がより実験に近くなることを確認した.

2 マルコフ連鎖拡散符号を用いた非同期 SSMA 通信システムに対する MAI

J 人のユーザから成る、直接拡散 (DS:direct-sequence) SSMA 通信システムを考える. データ記号及び符号記号は二極であるとする. j -番目のユーザのデータ信号 $D^{(j)}(t)$ 及びそれに割り当てられた PN (pseudonoise) 符号信号 $Y^{(j)}(t)$ ($j = 0, 1, \dots, J-1$) は、それぞれ、 $D^{(j)}(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} D_r^{(j)} u_{T_d}(t - rT_d)$, $D_r^{(j)} \in \{1, -1\}$, 及び $Y^{(j)}(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} Y_q^{(j)} \psi_{T_c}(t - qT_c)$, $Y_q^{(j)} \in \{1, -1\}$ と表される. ここで、 $u_T(t)$ は、 $u_T(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T, \\ 0 & \text{それ以外,} \end{cases}$ で定義される. チップ波形 $\psi_T(t)$ は区間 $[0, T]$ に時間制限され、 $\frac{1}{T} \int_0^T \psi_T^2(t) dt = 1$ を満たす. 実用上、 $\psi_T(t) \geq 0$ を仮定する. スペクトル拡散信号 $s^{(j)}(t)$ は、 $s^{(j)}(t) = Y^{(j)}(t) D^{(j)}(t)$ で与えられる. j -番目のユーザの PN 符号系列 $(Y_q^{(j)})_{q=-\infty}^{\infty}$ は周期 $N = T_d/T_c$ を有すると仮定する. その結果、各データ記号に対して、PN 系列 $\mathbf{Y}^{(j)} = (Y_n^{(j)})_{n=0}^{N-1}$ が割り当てられる. 一般性を失うことなく、 $T_c = 1$ を仮定する. このとき、 $\psi_{T_c} = \psi_1$ を以下、単に ψ で表す. 本報告では、終始、0-番目のユーザの PN 符号系列 $\mathbf{Y}^{(0)}$ を $\mathbf{X} = (X_n)_{n=0}^{N-1}$ で表す.

受信信号が、 $\mathbf{Y}^{(0)} = \mathbf{X}$ に適合する相関受信器への入力となると、非同期 SSMA 通信システムに対して、 r -番目の周期に於ける出力は $D_r^{(0)} N + I_{J,r} + \eta$ で与えられる. ここで、 $\eta = \int_{rT_d}^{(r+1)T_d} n(t - t_0) X(t) dt$. $I_{J,r}$ を r -番目の周期に於ける $J-1$ 人の他のユーザからの MAI と呼ぶ. 非同期 SSMA 通信システムに対して、

$$I_{J,r} = \sum_{j=1}^{J-1} \left\{ Y_{\ell_j}^{(j)} X_0 D_r^{(j)} R_\psi(\tau_j; D_r^{(j)} D_{r+1}^{(j)} X_{N-1} X_0) + \sum_{n=1}^{N-\ell_j-1} Y_{n+\ell_j}^{(j)} X_n D_r^{(j)} R_\psi(\tau_j; X_{n-1} X_n) + \sum_{n=N-\ell_j}^{N-1} Y_{n-N+\ell_j}^{(j)} X_n D_{r+1}^{(j)} R_\psi(\tau_j; X_{n-1} X_n) \right\} \cos \phi_j, \quad (1)$$

である. 但し、

$$R_\psi(\tau; X) = \int_0^{1-\tau} \psi(t) \psi(t + \tau) dt + X \int_{1-\tau}^1 \psi(t) \psi(t - 1 + \tau) dt.$$

$\ell_j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 及び $0 \leq \tau_j \leq 1$ は、それぞれ、 j -番目の通信路に於ける、遅れ時間の整数部分及び小数部分を表す。また、 $0 \leq \phi_j \leq 2\pi$ は j -番目のキャリアの位相シフトを表す。 $n(t)$ は通信路雑音過程を表し、独立であると仮定される。

[5] に従い、MAI 全ての位相シフトと時間遅れを、一様分布を有する単一の確率ベクトル $\Theta = (\Phi_1, \dots, \Phi_{J-1}, T_1, \dots, T_{J-1})$ に纏める。特定の値は小文字 $\theta = (\phi_1, \dots, \phi_{J-1}, \tau_1, \dots, \tau_{J-1})$ で表す。

3 MAI を原因とする条件付きビット誤り生起確率の大偏差

この節に於いて、条件付きビット誤り生起確率の漸近挙動を考える。一般性を失うことなく、 $D_r^{(0)} = -1$ の場合のみを考える。このとき、条件付きビット誤り生起確率は $\mathbb{P}(I_{J,r} + \eta \geq N | \Theta = \theta)$ で与えられる。ここで、 $\mathbb{P}(E|C)$ は事象 C が与えられた事象 E の条件付き確率を表し、 $\mathbb{P}(E)$ は事象 E の確率を表す。

雑音過程 $n(t)$ が独立であると仮定される限り、 \mathbf{X} と $\mathbf{Y}^{(j)}$ がマルコフ連鎖である場合でさえ、条件付きビット誤り生起確率の大偏差解析に於ける $n(t)$ の技術的扱いだけでなく、条件付きビット誤り生起確率への $n(t)$ の定量的寄与も、 \mathbf{X} と $\mathbf{Y}^{(j)}$ が i.i.d. である [5] と全く同じである。繰り返しを避けるため、本研究では、

$$\mathcal{P}_N(\theta) = \mathbb{P}(I_{J,r} \geq N | \Theta = \theta)$$

のみを考える。これは、雑音の無い理想的通信路を考えるのに同等である。

今、 $\mathbf{D}^{(j)} = (D_r^{(j)})_{r=-\infty}^{\infty}$ ($j = 1, 2, \dots, J-1$) は $\{-1, 1\}$ -値 i.i.d. 確率変数列で定常分布に従うとする。 $\mathbf{X} = (X_n)_{n=0}^{N-1}$ は $\{-1, 1\}$ -値定常マルコフ連鎖列で推移行列 $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$ で特徴付けられるとする。 \mathbf{X} と $\mathbf{D}^{(j)}$ は互いに独立であると仮定する。

補題 1 $\bar{X}^{(j)} = D_r^{(j)} D_{r+1}^{(j)} X_{N-1} X_0$ ($j \geq 1$) 及び $\tilde{X}_n = X_{n-1} X_n$ ($n \geq 1$) と定義する。このとき、 $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{X}^{(j)})_{j=1}^{J-1}$ 及び $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_n)_{n=1}^{N-1}$ は互いに独立な i.i.d. 確率変数列であり、それぞれ、 $\mathbb{P}(\bar{X}^{(j)} = -1) = \mathbb{P}(\bar{X}^{(j)} = 1) = \frac{1}{2}$ ($j \geq 1$) 及び $\mathbb{P}(\tilde{X}_n = -1) = p$, $\mathbb{P}(\tilde{X}_n = 1) = 1-p$ ($n \geq 1$) を有する。

次に、 $\mathbf{Y}^{(j)} = (Y_n^{(j)})_{n=0}^{N-1}$ ($j = 1, \dots, J-1$) は $\{-1, 1\}$ -値定常マルコフ連鎖列で上記 P で決定されるとする。 \mathbf{X} , $\mathbf{D}^{(j)}$ と $\mathbf{Y}^{(j)}$ は互いに独立であるとしよう。

一般性を失うことなく、以下、 $\ell_1 \geq \dots \geq \ell_{J-1}$ を仮定する。 $W_n^{(j)} = Y_{n+\ell_j \pmod{N}}^{(j)} X_n$ を定義する。 $\mathbb{P}(W_n^{(j)} = -1) = \mathbb{P}(W_n^{(j)} = 1) = 1/2$ に注意する。さらに、

$$Z_n = \begin{cases} \sum_{j=1}^{J-1} Y_{\ell_j}^{(j)} X_0 D_r^{(j)} R_\psi(\tau_j; \bar{X}^{(j)}) \cos \phi_j, & n = 0, \\ \sum_{j=1}^{J-1} W_n^{(j)} D_r^{(j)} R_\psi(\tau_j; \tilde{X}_n) \cos \phi_j, & 1 \leq n < N - \ell_1, \\ \sum_{j=1}^i W_n^{(j)} D_{r+1}^{(j)} R_\psi(\tau_j; \tilde{X}_n) \cos \phi_j + \sum_{j=i+1}^{J-1} W_n^{(j)} D_r^{(j)} R_\psi(\tau_j; \tilde{X}_n) \cos \phi_j, & N - \ell_i \leq n < N - \ell_{i+1}, 1 \leq i \leq J-2, \\ \sum_{j=1}^{J-1} W_n^{(j)} D_{r+1}^{(j)} R_\psi(\tau_j; \tilde{X}_n) \cos \phi_j, & N - \ell_{J-1} \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

を定義する。これより、 $I_{J,r} = \sum_{n=0}^{N-1} Z_n$ を得る。

確率ベクトル $W_n = (W_n^{(1)}, \dots, W_n^{(J-1)})$ を定義する。また、 $P^- = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ 及び $P^+ = P$ を定義する。上に述べた状況の下、 $+$ 及び $-$ をそれぞれ 1 および -1 に同一視すると、次を得る：

補題 2 確率ベクトルの列 $(W_n)_{n=1}^{N-\ell_1}$, $(W_n)_{n=N-\ell_{i+1}}^{N-\ell_i}$, 及び $(W_n)_{n=N-\ell_{J-1}+1}^{N-1}$ は、それぞれ、推移行列 $(\underbrace{P^{\tilde{X}_n} \otimes \dots \otimes P^{\tilde{X}_n}}_{J-1})_{n=1}^{N-\ell_1-1}$, $(\underbrace{P^{\tilde{X}_n} \otimes \dots \otimes P^{\tilde{X}_n}}_{J-1})_{n=N-\ell_{i+1}}^{N-\ell_i-1}$, 及び $(\underbrace{P^{\tilde{X}_n} \otimes \dots \otimes P^{\tilde{X}_n}}_{J-1})_{n=N-\ell_{J-1}+1}^{N-2}$ で特徴付けられる定常マルコフ連鎖である。ここで $1 \leq i \leq J-2$ 。各二つの確率ベクトル $W_{N-\ell_i}$ 及び $W_{N-\ell_{i+1}}$ は、推移行列 $\underbrace{P^{\tilde{X}_{N-\ell_i}} \otimes \dots \otimes P^{\tilde{X}_{N-\ell_i}}}_{i-1} \otimes (P^{\tilde{X}_{N-\ell_i}})^{N-1} \otimes \underbrace{P^{\tilde{X}_{N-\ell_i}} \otimes \dots \otimes P^{\tilde{X}_{N-\ell_i}}}_{J-i-1}$ を有する定常マルコフ連鎖を成す。ここで $1 \leq i \leq J-2$ 。

$m \times m$ 行列 A と $n \times n$ 行列 B に対して, $A \otimes B$ は A と B のテンソル積を表す.

[5] に従い,

$$\delta(\phi, \tau) = \cos \phi R_\psi(\tau; -1) \quad (2)$$

及び

$$\sigma(\phi, \tau) = \cos \phi R_\psi(\tau; 1) \quad (3)$$

と書く. また, $\tilde{P}_\alpha^-(d; \phi, \tau) = P^- \text{diag}\{e^{-\alpha d \delta(\phi, \tau)}, e^{\alpha d \delta(\phi, \tau)}\}$, $\tilde{P}_\alpha^+(d; \phi, \tau) = P^+ \text{diag}\{e^{-\alpha d \sigma(\phi, \tau)}, e^{\alpha d \sigma(\phi, \tau)}\}$, $\tilde{P}_{N-1, \alpha}^-(d; \phi, \tau) = (P^-)^{N-1} \text{diag}\{e^{-\alpha d \delta(\phi, \tau)}, e^{\alpha d \delta(\phi, \tau)}\}$, 及び $\tilde{P}_{N-1, \alpha}^+(d; \phi, \tau) = (P^+)^{N-1} \text{diag}\{e^{-\alpha d \sigma(\phi, \tau)}, e^{\alpha d \sigma(\phi, \tau)}\}$ を定義する. ここで, $\text{diag}\{a_1, \dots, a_m\}$ は, 対角要素が a_1, \dots, a_m である対角行列である.

マルコフ連鎖拡散符号を用いた非同期 SSMA 通信システムの大偏差解析のため, $S_N = I_{J,r} = \sum_{n=0}^{N-1} Z_n$ の対数モーメント母関数:

$$\Lambda(\alpha|\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \Lambda_N(\alpha|\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{E}[e^{\alpha S_N} | \Theta = \theta]$$

を評価する. ここで, $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ は σ -代数 \mathcal{F} が与えられた確率変数 X の条件付き期待値を表し, $\mathbb{E}[X]$ は X の期待値を表す.

これを得るために, 条件付き期待値

$$\mathbb{E}[e^{\alpha S_N} | \bar{D} = \bar{d}, \Theta = \theta]$$

を考えよう. ここで, $\bar{D} = (D_r^{(1)}, D_{r+1}^{(1)}, D_r^{(2)}, D_{r+1}^{(2)}, \dots, D_r^{(J-1)}, D_{r+1}^{(J-1)})$, $\bar{d} = (d_r^{(1)}, d_{r+1}^{(1)}, d_r^{(2)}, d_{r+1}^{(2)}, \dots, d_r^{(J-1)}, d_{r+1}^{(J-1)})$.

表記を簡潔にするために, 一時的に, $\tilde{P}_\alpha^{\tilde{X}_n}(d; \phi, \tau)$ 及び $\tilde{P}_{N-1, \alpha}^{\tilde{X}_n}(d; \phi, \tau)$ をそれぞれ $\tilde{P}^{\tilde{X}_n}(d)$ 及び $\tilde{P}_{N-1}^{\tilde{X}_n}(d)$ で表す. $(A_1 \otimes \dots \otimes A_m) \cdot (B_1 \otimes \dots \otimes B_m) = (A_1 \cdot B_1) \otimes \dots \otimes (A_m \cdot B_m)$ 及び, 補題 1 により, $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_n)_{n=1}^{N-1}$ は i.i.d. 確率変数列である事に注意して, 補題 2 により,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{\alpha S_N} | \bar{D} = \bar{d}, \Theta = \theta] &= \mathbb{E}[\tilde{P}^{\tilde{X}_1}(d_r^{(1)}) \otimes \dots \otimes \tilde{P}^{\tilde{X}_1}(d_r^{(J-1)})]^{N-\ell_1-1} \\ &\quad \times \mathbb{E}[\tilde{P}_{N-1}^{\tilde{X}_1}(d_{r+1}^{(1)}) \otimes \tilde{P}^{\tilde{X}_1}(d_r^{(2)}) \otimes \dots \otimes \tilde{P}^{\tilde{X}_1}(d_r^{(J-1)})] \\ &\quad \times \mathbb{E}[\tilde{P}^{\tilde{X}_1}(d_{r+1}^{(1)}) \otimes \tilde{P}^{\tilde{X}_1}(d_r^{(2)}) \otimes \dots \otimes \tilde{P}^{\tilde{X}_1}(d_r^{(J-1)})]^{\ell_1-\ell_2-1} \\ &\quad \times \mathbb{E}[\tilde{P}^{\tilde{X}_1}(d_{r+1}^{(1)}) \otimes \tilde{P}_{N-1}^{\tilde{X}_1}(d_{r+1}^{(2)}) \otimes \tilde{P}^{\tilde{X}_1}(d_r^{(3)}) \otimes \dots \otimes \tilde{P}^{\tilde{X}_1}(d_r^{(J-1)})] \times \dots \\ &\quad \times \mathbb{E}[\tilde{P}^{\tilde{X}_1}(d_{r+1}^{(1)}) \otimes \dots \otimes \tilde{P}_{N-1}^{\tilde{X}_1}(d_{r+1}^{(J-1)})] \cdot \mathbb{E}[\tilde{P}^{\tilde{X}_1}(d_{r+1}^{(1)}) \otimes \dots \otimes \tilde{P}^{\tilde{X}_1}(d_{r+1}^{(J-1)})]^{\ell_{J-1}-2} \end{aligned} \quad (4)$$

を得る.

${}^t P^- = P^-$ 及び ${}^t P^+ = P^+$ に注意して, 次の補題が正しい事を容易に確認できる. ここで, ${}^t A$ は行列 A の転置を表す.

補題 3 任意の i ($1 \leq i \leq J-1$) に対して, 行列 $\mathbb{E}[\otimes_{j=1}^{J-1} \tilde{P}^{\tilde{X}_1}(d_j)]$ の固有方程式は $\mathbb{E}[(\otimes_{j=1}^{i-1} \tilde{P}^{\tilde{X}_1}(d_j)) \otimes \tilde{P}^{\tilde{X}_1}(-d_i) \otimes (\otimes_{j=i+1}^{J-1} \tilde{P}^{\tilde{X}_1}(d_j))]$ のそれに等しい. ここで $d_j \in \{-1, 1\}$ ($1 \leq j \leq J-1$). 任意の i 及び 任意の k ($1 \leq i, k \leq J-1$) に対して, 同じ主張が行列 $\mathbb{E}[(\otimes_{j=1}^{k-1} \tilde{P}^{\tilde{X}_1}(d_j)) \otimes \tilde{P}_{N-1}^{\tilde{X}_1}(d_k) \otimes (\otimes_{j=k+1}^{J-1} \tilde{P}^{\tilde{X}_1}(d_j))]$ に対して成立する.

ここで, $\otimes_{j=1}^m A_j$ は $A_1 \otimes \dots \otimes A_m$ を表す.

先に, 確率変数 Φ_j , $1 \leq j \leq J-1$, は一様分布に従い, $[0, 2\pi)$ に値を取るとしたが, 補題 3 により, 一様分布に従い, $[-\pi/2, \pi/2)$ に値を取るとして良い. 以下, その様に仮定する.

$\mathbb{E}[\otimes_{j=1}^{J-1} \tilde{P}_\alpha^{\tilde{X}_1}(1; \phi_j, \tau_j)]$ は既約行列である事に注意する. 行列 $\mathbb{E}[\otimes_{j=1}^{J-1} \tilde{P}_\alpha^{\tilde{X}_1}(1; \phi_j, \tau_j)]$ の Perron-Frobenius 固有値を $\rho_\alpha(\theta)$ で表す. 補題 1 により, $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_n)_{n=1}^{J-1}$ は i.i.d. 確率変数列であるので, 補題 3 及び (4) を考慮して,

$$\Lambda(\alpha|\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{E}[e^{\alpha S_N} | \Theta = \theta] = \log \rho_\alpha(\theta) \quad (5)$$

を得る.

Perron-Frobenius 固有値 $\rho_\alpha(\theta)$ は正かつ α に関して微分可能であるので, Gärtner-Ellis 定理 [8] により次を得る:

定理 1 すべての $z \in \mathbb{R}$ に対して,

$$I_\theta(z) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \{\alpha z - \Lambda(\alpha|\theta)\},$$

を定義する. このとき, 上に述べた状況の下, $\Theta = \theta$ が与えられた経験平均 S_N/N は, 凸な, 良い割合関数 I_θ で条件付き LDP を満たす.

ここで, \mathbb{R} は実数全体の集合を表す.

系 1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathcal{P}_N(\theta) = -I(\theta),$$

ここで

$$I(\theta) = \max_{\alpha \geq 0} \{\alpha - \Lambda(\alpha|\theta)\} = I_\theta(1). \quad (6)$$

(6) に於いて, 最大値を与える α の値を $\alpha^*(\theta)$ で表す.

4 平均ビット誤り生起確率の漸近挙動

$u(\theta) = (u_1(\theta), \dots, u_{2^{J-1}}(\theta))$ 及び ${}^t v(\theta) = (v_1(\theta), \dots, v_{2^{J-1}}(\theta))$ をそれぞれ, $\rho_{\alpha^*(\theta)}(\theta)$ に対応する $\mathbb{E}[\otimes_{j=1}^{J-1} \tilde{P}_\alpha^{\tilde{X}_1}(1; \phi_j, \tau_j)]$ の狭義正な, 左及び右固有ベクトルであるとする. ここで, ${}^t v$ はベクトル v の転置を表す. $\sum_{i=1}^{2^{J-1}} u_i(\theta)v_i(\theta) = 1$ を満たすよう, $u(\theta)$ と $v(\theta)$ を規格化する.

Z_n の法則は非格子的であることに注意して, Miller の定理 [9] により, 次を得る:

定理 2

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} e^{NI(\theta)} \mathcal{P}_N(\theta) = \frac{c_{\alpha^*(\theta)}(\theta)}{\sqrt{2\pi} \tilde{\sigma}_{\alpha^*(\theta)}(\theta) \rho_{\alpha^*(\theta)}(\theta) \alpha^*(\theta)},$$

ここで,

$$c_{\alpha^*(\theta)}(\theta) = \frac{1}{2^{J-1}} (p \otimes_{j=1}^{J-1} (e^{-\alpha^*(\theta)\delta(\phi_j, \tau_j)}, e^{\alpha^*(\theta)\delta(\phi_j, \tau_j)}) + (1-p) \otimes_{j=1}^{J-1} (e^{-\alpha^*(\theta)\sigma(\phi_j, \tau_j)}, e^{\alpha^*(\theta)\sigma(\phi_j, \tau_j)})) \cdot v(\theta) \\ \times \sum_{i=1}^{2^{J-1}} u_i(\theta)$$

及び

$$\tilde{\sigma}_{\alpha^*(\theta)}(\theta)^2 = \frac{\rho_{\alpha^*(\theta)}(\theta)''}{\rho_{\alpha^*(\theta)}(\theta)} - \left(\frac{\rho_{\alpha^*(\theta)}(\theta)'}{\rho_{\alpha^*(\theta)}(\theta)} \right)^2 = \frac{\rho_{\alpha^*(\theta)}(\theta)''}{\rho_{\alpha^*(\theta)}(\theta)} - \alpha^*(\theta)^2.$$

しかしながら, 我々は, 平均ビット誤り生起確率 $\bar{\mathcal{P}}_N = \mathbb{E}[\mathcal{P}_N(\Theta)]$ に興味がある.

条件付きビット誤り生起確率 $\mathcal{P}_N(\theta)$ を最大化する, 最悪の場合の位相シフト-遅れ時間ベクトル値 θ を考えよう. $\theta = (\phi_1, \dots, \phi_{J-1}, \tau_1, \dots, \tau_{J-1})$ は $E = [-\pi/2, \pi/2]^{J-1} \times [0, 1]^{J-1}$ に値を取ることを思い出す. しかしながら, $\Lambda(\alpha|\theta)$ 及び $\Lambda'(\alpha|\theta)$ は θ に関して連続であるので, これを閉長方形 $\bar{E} = [-\pi/2, \pi/2]^{J-1} \times [0, 1]^{J-1}$ に拡大し, Θ は $\bar{E} \setminus E$ 上で零確率を有するようする. 記法 $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_{J-1}) \in [-\pi/2, \pi/2]^{J-1}$ 及び $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{J-1}) \in [0, 1]^{J-1}$ を導入し, $\theta = (\phi, \tau)$ と書く.

最悪の場合の割合関数は $\bar{I} = \min_{\theta} I(\theta)$ で与えられる. \mathbf{X} 及び $\mathbf{Y}^{(j)}$ がマルコフ連鎖の場合でさえ, [5] に於いて導出された以下の三つの命題がそのまま成立する事を検証するのは困難ではない.

命題 1 $\bar{I} = I(\bar{\theta})$ を満たす $\theta \in \bar{E}$ が少なくとも一つ存在する. さらに, 任意のその様な $\bar{\theta}$ に対して,

$$\bar{I} = \alpha^*(\bar{\theta}) - \Lambda(\alpha^*(\bar{\theta})|\bar{\theta}) = \max_{\alpha \geq 0} \left\{ \alpha - \max_{\theta \in \bar{E}} \Lambda(\alpha|\theta) \right\}$$

を得る.

命題 2 2^{J-1} 個の最悪の場合の位相シフト-遅れ時間ベクトルが存在し, $\bar{\theta}^{(k)}$, $1 \leq k \leq 2^{J-1}$ と番号を付ける. 最悪の場合の位相シフトベクトルは $\bar{\phi}^{(k)} = \mathbf{0}$ であり, 最悪の場合の遅れ時間ベクトルは $\bar{\tau}^{(k)} = (\bar{\tau}_1^{(k)}, \dots, \bar{\tau}_{J-1}^{(k)})$ である. ここで, $\bar{\tau}_j^{(k)} = 0$ または 1 , $1 \leq j \leq J-1$. さらに, 各 k に対して, $\Lambda(\alpha|\bar{\theta}^{(k)}) = \Lambda(\alpha|\mathbf{0})$ を得, 故に, $\alpha^*(\bar{\theta}^{(k)})$ は k に依存しない.

命題 3

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \bar{\mathcal{P}}_N = -\bar{I}.$$

その結果, 定理 2 を考慮して, $I(\theta)$ の Taylor 級数展開の二次の項までを用いると, [5] の定理 1 の証明の方法を適用することができ, 次が示される:

定理 3 ψ は $(0, 1)$ 上連続微分可能であつて, $\psi(0) \neq 0$ かつ $\lim_{t \rightarrow 1-0} \psi(t) \neq 0$, または $\psi(0) \neq \lim_{t \rightarrow 1-0} \psi(t)$ を満たすとする. このとき,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{\frac{3(J-1)+1}{2}} e^{N\bar{I}} \bar{\mathcal{P}}_N = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{J-1}{2}} \cdot \frac{c_{\alpha^*}(\mathbf{0})}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}_{\alpha^*}(\mathbf{0})\rho_{\alpha^*}(\mathbf{0})\alpha^*}} \cdot \sum_{k=1}^{2^{J-1}} \frac{1}{\prod_{j=1}^{J-1} |\mu_j^{(k)}| \nu_j^{(k)}}. \quad (7)$$

ここで, $\alpha^* = \alpha^*(\mathbf{0})$,

$$\mu_j^{(k)} = \frac{\partial \Lambda(\alpha|\theta)}{\partial \delta_j} \Big|_{\substack{\theta=(\mathbf{0}, \bar{\tau}^{(k)}) \\ \alpha=\alpha^*}} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \tau}(0, \bar{\tau}_j^{(k)}) + \frac{\partial \Lambda(\alpha|\theta)}{\partial \sigma_j} \Big|_{\substack{\theta=(\mathbf{0}, \bar{\tau}^{(k)}) \\ \alpha=\alpha^*}} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \tau}(0, \bar{\tau}_j^{(k)})$$

及び

$$\nu_j^{(k)2} = - \frac{\partial \Lambda(\alpha|\theta)}{\partial \delta_j} \Big|_{\substack{\theta=(\mathbf{0}, \bar{\tau}^{(k)}) \\ \alpha=\alpha^*}} \cdot \delta(0, \bar{\tau}_j^{(k)}) - \frac{\partial \Lambda(\alpha|\theta)}{\partial \sigma_j} \Big|_{\substack{\theta=(\mathbf{0}, \bar{\tau}^{(k)}) \\ \alpha=\alpha^*}} \cdot \sigma(0, \bar{\tau}_j^{(k)}).$$

ここで, 定義 (2) 及び (3) に於いて, δ 及び σ は j に独立である事に注意する. しかしながら, 偏微分 $\partial \Lambda(\alpha|\theta)/\partial \delta_j$ 及び $\partial \Lambda(\alpha|\theta)/\partial \sigma_j$ を計算するとき, $\Lambda(\alpha|\theta)$ を $(\delta_1, \sigma_1, \dots, \delta_{J-1}, \sigma_{J-1}) = (\delta(\theta_1, \tau_1), \sigma(\theta_1, \tau_1), \dots, \delta(\theta_{J-1}, \tau_{J-1}), \sigma(\theta_{J-1}, \tau_{J-1}))$ の関数であると見做す. 記法を簡単にするため, 以後, $\delta_j = \delta(\theta_j, \tau_j)$ 及び $\sigma_j = \sigma(\theta_j, \tau_j)$, $1 \leq j \leq J-1$ と書く.

(7) の右辺, 平均ビット誤り生起確率の精確な漸近挙動に対する係数を得るためには, $\rho_\alpha(p; \theta)$ の陽な表現が必要である.

例 1 $J=3$ に対して,

$$\rho_\alpha(p; \theta) = p^3 \cosh(\alpha\delta_1) \cosh(\alpha\delta_2) + (1-p)^3 \cosh(\alpha\sigma_1) \cosh(\alpha\sigma_2) + \sqrt{\Delta_1} + \sqrt{\Delta_2}$$

を得る. ここで, Δ_1 及び Δ_2 は四次方程式 $x^4 - t_\alpha(p; \theta)x^3 + A_\alpha(p; \theta)x^2 - B_\alpha(p; \theta)x + d_\alpha(p) = 0$, の Ferrari の解により決定される. それらの係数については [10] を見られたい.

$A_\alpha(\frac{1}{2}; \theta) = B_\alpha(\frac{1}{2}; \theta) = d_\alpha(\frac{1}{2}) = 0$, に注意して, 次を得る:

注 1 $p=1/2$ のとき, すなわち, \mathbf{X} と $\mathbf{Y}^{(j)}$ i.i.d. 確率変数列であるとき, $J=3$ に対して

$$\rho_\alpha\left(\frac{1}{2}; \theta\right) = \frac{1}{2} \{ \cosh(\alpha\delta_1) \cosh(\alpha\delta_2) + \cosh(\alpha\sigma_1) \cosh(\alpha\sigma_2) \}$$

を得る. これは [5] で導出された.

$J \geq 4$ に対して, $\rho_\alpha(p; \theta)$ は, [5] に於いて陽に得られた $p=1/2$ の場合を除いて, 計算可能な値であるかは疑問である.

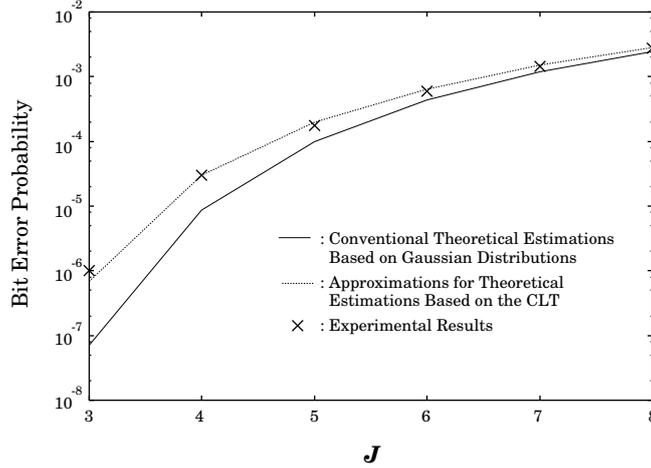


図 1: $N = 32$ のとき, 第二固有値 $\lambda = -2 + \sqrt{3}$ を有する推移行列により特徴付けられる 2 値マルコフ連鎖拡散符号を用いた, 非同期 SSMA 通信システムに於けるビット誤り発生確率

5 マルコフ連鎖拡散符号を用いた非同期 SSMA 通信システムに於けるビット誤り発生確率の評価

図 1 に, $N = 32$ のとき, 推移行列の第二固有値 $\lambda = -2 + \sqrt{3}$ を有する 2 値マルコフ連鎖拡散符号を用いた, 非同期 SSMA 通信システムに於けるビット誤り発生確率の CLT に基づく理論的評価と実験結果のユーザ数 J 依存性を示す. チップ波形は長方形であるとした. MAI が原因で発生するビット誤り発生確率の, 単純且つ正確な理論的表現を得るのが主要目的の一つであるので, 雑音の無い理想的な通信路を考えた.

一方, ビット誤り発生確率に関して最適な拡散符号を設計することも主要目的であった. 固有値 $\lambda = -2 + \sqrt{3}$ は, 規格化された MAI の分散の極限の期待値 $\sigma_\infty^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[V(I_{J,p})/\sqrt{N}]$ に関して最適である. 言い換えると, SGA に関して最適な固有値である. ここで, $V(Z)$ は確率変数 Z の分散を表す. マルコフ連鎖拡散符号を用いた非同期 SSMA 通信システムに於けるビット誤り発生確率の SGA に関する拡散符号の最適設計は, 2 値系列に関する限り, 位相シフト ϕ_j に無関係であることがわかっている [7]. 数値実験を効率的に行うため, 図 1 では, $\phi_j = 0, 1 \leq j \leq J-1$ と ϕ_j を固定した. これは, ベースバンド通信を考えるのと同様である. もしも ϕ_j を考慮するならば, SGA に基づく Gauss 密度 $\varphi_{0, \sigma_\infty^2/2}(z)$ では無く, $\varphi_{0, \sigma_\infty^2}(z)$ の尾部を処理しなければならない. 但し

$$\varphi_{\mu, \sigma^2}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad z \in \mathbb{R}.$$

ここで, 拡散符号を最適設計する立場からは, 非同期 SSMA 通信システムを数値実験する際, $\tau_j, 1 \leq j \leq J-1$ を固定することはできない事を注意しておく. 実際, $\tau_j = 0, 1 \leq j \leq J-1$ を満たすシステムはチップ同期と呼ばれ, その様なチップ同期システムに対しては, 推移行列の第二固有値 $\lambda = 0$ を有するマルコフ連鎖拡散符号, すなわち, i.i.d. 確率変数列が SGA に関して最適である.

この図に於いて, 折れ線は SGA に基づく評価を表す. これは, CLT に基づくビット誤り発生確率の評価に対する 0 次近似を示している:

$$\int_{\sqrt{N}}^{\infty} \varphi_{0, (J-1)E[\sigma(T)^2]}(z) dz, \quad (8)$$

ここで

$$E[\sigma(T)^2] = \frac{2}{3} \left(1 + 2 \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \right).$$

一方, 点線は, [6] で得られた二次近似を表す:

$$\int_{\sqrt{N}}^{\infty} \varphi_{0, (J-1)E[\sigma(T)^2]}(z) dz + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(J-1)} \cdot \frac{V[\sigma(T)^2]}{E[\sigma(T)^2]^2} \left(\frac{N}{(J-1)E[\sigma(T)^2]} - 3 \right) \cdot \sqrt{\frac{N}{(J-1)E[\sigma(T)^2]}} \cdot \varphi_{0,1} \left(\sqrt{\frac{N}{(J-1)E[\sigma(T)^2]}} \right). \quad (9)$$

$\sigma(T)^2$ の分散は

$$V[\sigma(T)^2] = \frac{1}{45} \left(1 + 2 \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2} - \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} \right)^2$$

で与えられる。後者は SGA に基づく評価式よりも実験結果に良く一致する。しかしながら、 $J = 3$ のとき、実験結果からはずれることがわかる。これより、我々の主要な感心は $J = 3$ である。

上に述べた設定の下、図 2 に、 $J = 3$ のとき、推移行列の第二固有値 $\lambda = -2 + \sqrt{3}$ を有する 2 値マルコフ連鎖拡散符号を用いた、非同期 SSMA 通信システムに於けるビット誤り生起確率の CLT に基づく理論的評価、LDP に基づく理論的評価、及び実験値の PN 系列の周期長 N 依存性を示す。ここで、この設定の下では、(7) の左辺に於ける $N^{\frac{3(J-1)+1}{2}}$ は $N^{\frac{2(J-1)+1}{2}}$ で置き換えられ、(7) に於ける右辺の $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{J-1}{2}}$ と $\nu_j^{(k)}$ は 1 で置き換えられる事を付記しておく。

この図から、LDP に基づく二次近似 (7) を SGA (8) と比較すると、大偏差漸近挙動は支配的であると結論を下すことができるであろう。しかしながら、(7) を CLT に基づく二次近似 (9) と比較すると、全く異なる観察を得ることがわかる。これは、拡散符号が i.i.d. 確率変数列である場合に [5] でなされた比較に重要な疑問を呈する。

どれ位の比 J/N で、中心極限漸近解析が妥当でなくなり、大偏差漸近挙動が支配的となるかを知るために、(7) を (8) ではなく、(9) と比較しよう。この場合、(7) と (9) は共に二次近似である。このとき、図 2 は、 $J/N < 1/10$ になると、実験値は CLT 漸近挙動からはずれ、大偏差漸近挙動により近づく傾向にあることを示している。

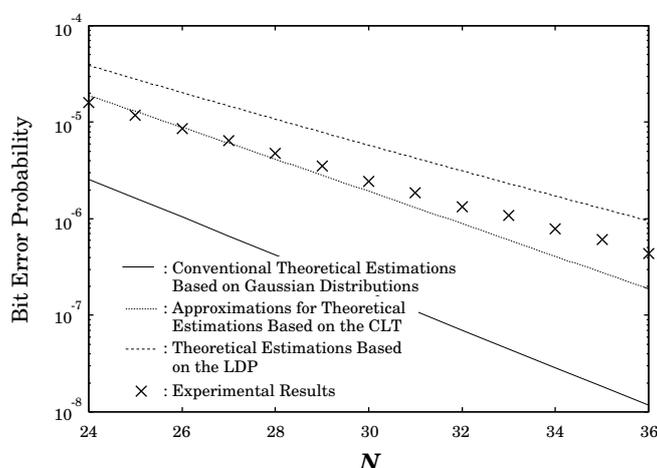


図 2: $J = 3$ のとき、第二固有値 $\lambda = -2 + \sqrt{3}$ を有する推移行列により特徴付けられる 2 値マルコフ連鎖拡散符号を用いた、非同期 SSMA 通信システムに於けるビット誤り生起確率

6 結言

本報告では、ビット誤り生起確率に関して最適な拡散符号を設計するために、マルコフ連鎖拡散符号を用いた非同期 SSMA 通信システムを考え、MAI の経験平均に LDP が成立する事を示した。得られた結果を精密化し、拡散符号の周期長 N が短く、且つ、ユーザ数 J が少ない場合のビット誤り確率の理論評価式を求めた。それと先に求めた CLT に基づく理論評価式及び実験値との比較を行ない、 $J/N < 1/10$ になると、CLT に基づく評価式よりも LDP に基づく評価式の方がより実験に近くなることを確認した。

参考文献

- [1] M. B. Pursley, "Performance Evaluation for Phase-Coded Spread-Spectrum Multiple-Access Communication — Part I: System Analysis", *IEEE Trans. Commun.*, vol.COM-25, no.8, pp.795-799, 1977.

- [2] K. Yao, "Error Probability of Asynchronous Spread Spectrum Multiple Access Communication Systems", *IEEE Trans. Commun.*, vol.COM-25, no.8, pp.803-809, 1977.
- [3] J. S. Lehnert and M. B. Pursley, "Error Probabilities for Binary Direct-Sequence Spread-Spectrum Communications with Random Signature Sequences", *IEEE Trans. Commun.*, vol.COM-35, no.1, pp.87-98, 1987.
- [4] G. Mazzini, G. Setti, and R. Rovatti, "Chaotic Complex Spreading Sequences for Asynchronous DS-CDMA Part I : System Modeling and Results", *IEEE Trans. Circuit Syst.-I* vol. CAS-44, no.10, pp.937-947, 1997.
- [5] J. S. Sadowsky and R. K. Bahr, "Direct-Sequence Spread-Spectrum Multiple-Access Communications with Random Signature Sequences: A Large Deviations Analysis", *IEEE Trans. Information Theory*, vol.37, no.3, pp.514-527, 1991.
- [6] H. Fujisaki and G. Keller, "The central limit theorem for the normalized sums of the MAI for SSMA communication systems using spreading sequences of Markov chains", *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E89-A, no.9, pp. 2307-2314, 2006.
- [7] H. Fujisaki, "Design of Optimum M -Phase Spreading Sequences of Markov Chains", *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E90-A, no.10, pp. 2055-2065, 2007.
- [8] R. S. Ellis, "Large Deviations for a General Class of Random Vectors", *Annals of Probability*, vol.12 pp. 1-12, 1984.
- [9] H. Miller, "A convexity property in theory of random variables defined on a finite Markov chain", *Ann. Math. Statist.*, vol.32, pp.1260-1270, 1961.
- [10] H. Fujisaki, "Large Deviations Analysis of SSMA Communication Systems with Spreading Sequences of Markov Chains," *Proc. IEEE ISIT 2008*, to appear, 2008.7.

< 発 表 資 料 >

題 名	掲載誌・学会名等	発表年月
Design of Optimum M -Phase Spreading Sequences of Markov Chains	IEICE Transactions on Fundamentals, Vol.E90-A, pp.2055-2065	2007.10
Phase-Shift-Free M -Phase Spreading Sequences of Markov Chains	IEEE Trans. on Circuit and Systems Part I, vol. 55, pp.876-882	2008.3
Large Deviations Analysis of SSMA Communication Systems with Spreading Sequences of Markov Chains	Proc. of the IEEE Int. Symp. on Information Theory, to appear	2008.7
On Exact Asymptotics of Bit Error Probabilities in SSMA Communication Systems with Spreading Sequences of Markov Chains	Proc. of the IEEE 10th Int. Symp. on Spread-Spectrum Techniques and Applications, to appear	2008.8