電気通信の伝送遅延を活用したネットワークシステム安定化技術の基礎研究

代表研究者　小 西 啓 治　大阪府立大学大学院　工学研究科　教授
共同研究者　原　尚 之　大阪府立大学大学院　工学研究科　准教授
共同研究者　渡 辺 智 彦　大阪府立大学大学院　工学研究科　博士前期課程

1 はじめに

1-1 研究背景

空間的に離れた場所へ必要な情報を電気的な信号に変換して伝える電気通信には，その長短は伝送媒体(電気，電波，光など)に依存するが，伝送遅延が伴うことは自明であろう．この伝送遅延は，通信の品質を下げるだけなく，電気通信を制御系に含むシステムの安定性を損なう要因として知られている．そこで，従来の工学システムでは，この不要な伝送遅延の影響をなるべく小さくするため，高速な通信デバイスの開発や，動作が速い通信媒体の提案が行われてきた．

工学システムでは排除すべきと考えられてきた伝送遅延を，従来とは全く逆の発想で，システムの安定性の向上に活用できないであろうか？ 特に，最近では，クラウドシステムなど，空間的に広がりを持つ大規模システムのサブシステム間の通信に，インターネットで代表されるデジタル通信を使用する場合が多数を占めている．そこで，このデジタル通信ネットワークを介した大規模化な制御対象が，信号の伝送遅延を有効活用することで，安定性は強化できないであろうか？

工学分野とは離れて，非線形学分野では，自発的に振動を呈する複数の発振器(自励発振器)を相互に作用させることで生じる極めて多種多様な非線形現象が，精力的に研究されている [1]．相互作用によって誘発される現象の 1 つとして知られている「振動停止現象」は，自励発振器に拡散的な結合を施すことによって，結果的に発振器の有する不安定平衡点が安定化されることを指す[2,3]．しかしながら，ほぼ同じ発振周波数を持つ発振器を結合させても，振動停止現象は発生しない．

結合された複数の発振器の相互作用に要する伝送遅延が，システム全体の安定性に大きく関与することが，近年，明らかになってきており，研究が精力的に行われている [4]．この伝送遅延は，ほぼ同じ周波数を持つ発振器を結合した場合，振動停止現象を誘発する [5]．この現象は，正に，伝送遅延がシステム全体の安定性強化に貢献している．この特性を利用した工学システムが，提案されつつある．具体的には，直流マイクログリッドシステムにおけるバス電圧の安定化 [6]，永久磁石同期モータの動作点の安定化 [7]，熱音響機器の不要な振動の除去 [8]などが，工学的応用の例として注目されている．この他にも，伝送遅延に誘発される振動停止現象の理論的な検討は精力的に実施されている [9,10]．しかしながら，振動停止現象に関する先行研究の大半は，各発振器が，常微分方程式で記述される連続時間力学系の場合のみを検討している．ここに，伝送遅延が加わると，システム全体の次元は無限大となる．したがって，その安定性解析には，通常の安定性判別法などが利用できず，困難が伴う．ここで，デジタル通信ネットワークを介した大規模化なシステムについて考えよう．デジタル通信では，時間的に連続な信号を，サンプルアンドホールドにより，離散時間信号に変換して，利用する．すなわち，連続時間力学系の発振器をデジタル信号で相互作用させることで，システム全体は離散時間力学系に帰着され，伝送遅延が生じていても，システム全体の次元は有限となり，安定性判別も既存の手法をそのまま利用できる．

1-2 離散時間力学系における振動停止現象

差分方程式(離散写像)で記述される離散時間力学系を発振器に，伝送遅延を施して誘発される振動停止現象が，2003 年に初めて観測された [11]．この先行研究では，一対の高次元写像に生じる振動停止現象の解析が行われている．その結果，写像がある条件を満たすと，いかなる相互作用を施しても，振動停止現象は生じないことが証明された．その後，同じ長さの結合遅延を持つ 1 次元写像から構成されるネットワーク [12]，異なる長さの結合遅延を持つ 1 次元写像から構成されるネットワーク [13,14,15]，同じ長さの結合遅延を持つ環状結合高次元写像ネットワーク [16]，における振動停止現象も解析的に調査が進められている．

しかしながら，上記の先行研究をより一般的に拡張した「遅延結合された高次元写像ネットワーク」に誘発される振動停止現象については，数学的な扱いが難しいため，全く手が付けられていない．本研究では，システム制御理論におけるロバスト安定論を駆使し，この困難さを打破する．具体的には，以下のような問題に取り組む．

■ 振動停止現象を誘発する相互作用のパラメータの系統的な設計
■ 振動停止現象が誘発されるメカニズムを分岐理論で解明

本研究の成果が幅広い分野で応用されることを期待し，本研究は，発振器を特定せず，一般的な高次元非線形写像を扱う．

2 遅延結合写像ネットワーク

2-1 数理モデル

本研究では，離散時間力学系で記述される遅延結合写像ネットワーク

$$\left\{\begin{array}{rcl}\boldsymbol{x}_i(n+1) & = & \boldsymbol{F}\left[\boldsymbol{x}_i(n)\right]+\boldsymbol{b}u_i(n), \\ y_i(n) & = & \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}_i(n),\end{array}\right.$$

を扱う．非線形関数 $\boldsymbol{F}:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^m$ は少なくとも 1 つの不安定平衡点 $\boldsymbol{x}^*:\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{F}\left[\boldsymbol{x}^*\right]$を持つ．各写像は，

$$u_i(n)=k\left[\left\{\sum_{j=1}^{N}\frac{\varepsilon_{ij}}{d_i}y_j(n-\tau)\right\}-y_i(n)\right],$$

で結合されている．この結合信号には，結合強度 k，遅延時間 τ，結合の有無を示す ε_{ij} が存在する．このネットワークには，空間的に一様な平衡状態

$$\left[\boldsymbol{x}_1(n)^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_N(n)^T\right]^T=\left[\boldsymbol{x}^{*T} \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}^{*T}\right]^T,$$

が存在する．各写像に結合が施されていない場合，この状態は不安定であり，各写像では振動が観察される．結合が施されても，この平衡状態の位置に変化はないが，安定性は，結合強度 k，遅延時間 τ，結合の有無を示す ε_{ij} に依存する．この平衡状態が安定化し，各写像の振動が停止することを，「振動停止現象」と呼ぶ．この現象を誘発するには結合強度 k と遅延時間 τ をどのように設定すればよいのか？という設計問題を，本研究の調査対象とする．

2-2 安定性解析

平衡状態の安定性は，平衡状態近傍の線形ダイナミクス

$$\boldsymbol{v}_i(n+1)=(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{v}_i(n)+k\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}\sum_{j=1}^{N}\frac{\varepsilon_{ij}}{d_i}\boldsymbol{v}_j(n-\tau),$$

の安定性と等価である．ただし， $\boldsymbol{v}_i(n):=\boldsymbol{x}_i(n)-\boldsymbol{x}^*$ は平衡状態からの摂動である．ここでヤコビ行列は， $\boldsymbol{A}:=\{\partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})/\partial\boldsymbol{x}\}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*}$ で与えられる．線形ダイナミクスは，

$$\boldsymbol{V}(n+1) = \left[\boldsymbol{I}_N \otimes (\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{bc})\right] \boldsymbol{V}(n) + (\boldsymbol{E} \otimes k\boldsymbol{bc})\boldsymbol{V}(n-\tau),$$

と記述できる．ただし，

$$\boldsymbol{V}(n) := \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1(n) \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_N(n) \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{E} := \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}/d_1 & \cdots & \varepsilon_{1N}/d_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{N1}/d_N & \cdots & \varepsilon_{NN}/d_N \end{bmatrix},$$

とする．

上記の線形ダイナミクスの特性多項式は，以下の通りである．

$$\overline{G}(z) := \det\left[z\boldsymbol{I}_{mN} - \boldsymbol{I}_N \otimes (\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{bc}) - (\boldsymbol{E} \otimes k\boldsymbol{bc})z^{-\tau}\right].$$

ここで，行列 $\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{E}$ は対角化できる［17, 18］．また，この行列の固有値

$$0{=}\rho_1 \leq \rho_2 \leq \cdots \leq \rho_N \leq 2,$$

は，上記のような条件を満足している．この固有値の数と値は，写像の個数とネットワークのトポロジーに依存している．ただし，いかなる場合も，上記の条件を破ることはない．この対角化により，上記の特性方程式は，

$$\overline{G}(z) := \textstyle\prod_{q=1}^{N} \bar{g}(z, \rho_q),$$
$$\overline{g}(z, \rho) := d(z) + n(z)k\left\{1 - (1-\rho)z^{-\tau}\right\},$$

と簡単化される．ここで，$d(z), n(z)$ は

$$\frac{n(z)}{d(z)} := \boldsymbol{c}(z\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{c}\mathrm{adj}(z\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A})\boldsymbol{b}}{\det\left[z\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\right]},$$

で与えられる．なお，上記の特性方程式の安定性は，下記の特性方程式

$$G(z) := \prod_{q=1}^{N} g(z, \rho_q),$$
$$g(z, \rho) := z^{\tau} d(z) + n(z)k\left(z^{\tau} - 1 + \rho\right),$$

の安定性と等価である．このことは，以下のことを意味する

【一様な平衡状態は，N 個の特性方程式 $g(z, \rho_q) = 0 \ (q = 1, \ldots, N)$ の全ての根が単位円内に存在するとき，そのときに限り，安定となる】

本研究では，この特性式の安定性を詳細に調べ，結合強度 k と遅延時間 τ の設計手順を示し，さらに，安定化へ至るメカニズムを解析する．

3 不安定条件と設計手順の導出

3-1 不安定条件

本節では，上記の一様な平衡状態が安定化しない十分条件を示す．まずは，以下の補題を得た．

【補題 1】結合遅延が $\tau = 0$ のとき，結合写像系が有する平衡状態は，ネットワーク構造や結合強度に関係なく，必ず不安定であり，振動停止現象は生じない．

【証 明】
$\rho = 0$ における特性多項式は以下の通りである．

$$g(z,0) := z^{\tau} d(z) + n(z)k\left(z^{\tau} - 1\right)$$

結合遅延が $\tau = 0$ のとき，この特性式は $d(z)$ となる．この $d(z)$ は不安定なヤコビ行列 $\boldsymbol{A}$ の特性式であるため，$d(z)$ はネットワーク構造や結合強度に関係なく不安定である．すなわち，結合遅延がゼロの場合，$g(z,0) = d(z)$ を含んだ $G(z)$ は，不安定となる．（証明終了）

【補題 2】ヤコビ行列 $\boldsymbol{A}$ が 1 より大きい実固有値を奇数個持つ（奇数条件）とき，結合写像系が有する平衡状態は，ネットワーク構造，結合強度，遅延時間に関係なく，必ず不安定であり，振動停止現象は生じない．

【証 明】
$\rho = 0$ における特性多項式は以下の通りである．

$$g(z,0) := z^{\tau} d(z) + n(z)k\left(z^{\tau} - 1\right)$$

ここで，$z = 1$ では，$g(1,0) = d(z)$ となり，ネットワーク構造，結合強度，結合遅延に関係しないことに注意してほしい．今，$\lim_{z\to\infty} g(z,0) = +\infty$ が成立し，かつ $d(1) < 0$ であれば，$d(z) = 0$ に，1 より大きい奇数個の実根が存在する．このことより，ヤコビ行列が 1 より大きい奇数個の固有値を持てば，$g(z,0) = 0$ は少なくとも，1 より大きい実根を持つ．（証明終了）

3-2 設計手順

本節は，結合強度，結合遅延の設計手順を与える．まず，セグメント多項式

$$L(z) := \{g(z,\rho) : \rho \in [0,\bar{\rho}]\}$$

の安定性について考える．$\bar{\rho} \le 2$ は，最大固有値 ρ_N の上限値とする．固有値の数と大きさは，写像の個数とネットワーク構造によって決定される．したがって，上記のセグメント多項式が安定であれば，写像の個数やネットワークの構造に影響されないロバストな安定性が保証できる．そこで，本研究では，このセグメント多項式を安定とする結合強度と結合遅延の設計を試みる．このセグメント多項式は，

$$L(z) = \{g(z,0) + \mu\hat{g}(z) : \mu \in [0,1]\}$$
$$\hat{g}(z) := g(z,\bar{\rho}) - g(z,0)$$

と書くことができる．次に示す 3 条件が成立していれば，このセグメント多項式は安定と判断される［19］．

- （a）$g(z,0)$：安定
- （b）$g(z,\bar{\rho})$：安定

➢　（c）$\hat{g}(z)$：実凸方向

上記の(a), (b)は，既存の安定判別法で確認できる［20］．ただし，(c)の判別はそれほど簡単ではない．そこで，(c)の判別について検討する．まず，$\hat{g}(z)$ は

$$\hat{g}(z) = g(z,\bar{\rho}) - g(z,0) = \bar{\rho}kn(z)$$

と書ける．この多項式と実凸方向の特性式から，次の補題が導ける．

【補題 3】$\theta \in (0,\pi)$ において

$$\frac{1}{n_r^2+n_i^2}\left(n_r\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}\theta} - n_i\frac{\mathrm{d}n_r}{\mathrm{d}\theta}\right) \le \frac{m}{2}$$
$$n\left(e^{j\theta}\right) := n_r(\theta) + jn_i(\theta)$$

が成立していれば，$\hat{g}(z)$ は実凸方向である．

【証　明】 省略

上記の $n(z)$ には，結合強度と結合遅延の情報が含まれていない．したがって，実凸方向性は，結合強度と結合遅延に関係ないことがわかる．ここまでの結果を以下の定理でまとめる．

【定理 1】まず，以下の条件が全て成立していると仮定する．

- $\boldsymbol{A}$ は奇数制約を満たしていない．
- 非線形写像は 2 次元以上である．
- $n(z)$ が補題 3 を満足している．

条件(a)(b) を成立させる結合強度と結合遅延であれば，平衡状態は，$\rho_N \le \bar{\rho}$ 条件下のいかなるネットワーク構造であっても，安定となる．

【証　明】 省略

3-3 数値例

本節は, これまでに得られた解析的な成果を, 数値シミュレーションで検証していく．非線形写像として，以下の遅延ロジスティック写像を採用しよう．

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) := \begin{bmatrix} x_{(2)} \\ px_{(2)}\left\{1-x_{(1)}\right\} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T,$$

$p = 2.1$ はパラメータである. ヤコビ行列は

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & 1 \end{bmatrix},$$

であり，これらから,

$$d(z) = z^2 - z + p - 1,\ n(z) = z - 1,$$

が得られる．今，$\bar{\rho} = 1.75$ に設定し，設計問題に取り組む．まず， $d(z) = 0$ の根 $z = 0.5 \pm j\sqrt{3.4}/2$ を

得た．次に， $n_r(\theta)=cos\,\theta-1$ と $n_i(\theta)=sin\,\theta$ を算出し，これらを補題 3 の不等式に代入すると，この不等式は $1/2\ \leq\ 1$ となることから，実凸方向が確認できる．最後に，$g(z,0)$ と$g(z,\bar{\rho})$ が安定となる$k=0.38$ と $\tau=3$ を設定する．

上記で設計した結合強度と結合遅延を，7 個の遅延ロジスティック写像を結合した 2 種類のネットワーク(i)(ii)に適用する．ネットワーク構造（i)では $\rho_7=1.7327$，ネットワーク構造（ii)では $\rho_7=1.8794$ となる．数値シミュレーションによって，ネットワーク構造（i）では振動停止現象が生じていることを確認したが，ネットワーク構造(ii)ではできなかった．これらの結果は，本研究の設計が正しいことを裏付けている．なお，詳しいことは参考資料を参照して欲しい．

4 振動停止に至るルートの解明

本章では，4 個の遅延ロジスティック写像を結合したネットワークを構築した．写像のパラメータ等は，3.3 節と同じものを用いた．また，結合遅延は $\tau=1$ に固定する．この場合，固有値は $\rho_1=0,\ \rho_2=1,\rho_3=4/3,\rho_4=5/3$ である．安定化へ至るルートを明らかにするため，4 個の特性方程式 $g(z,\rho_q)=0\ (q=1,\dots,4)$ それぞれについて，結合強度をゼロから変化させ，根軌跡を計算した．

結合強度がゼロの時，4 個の特性方程式の根は，ヤコビ行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 $0.5000\pm j0.9220$ と合致している．結合強度を 0 から 2.5 へ増加させる．$k=0.09993$ で，$g(z,1)=0$ の複素共役根が単位円を内側へ横切り，Neimark-Sacker (NS) 分岐が生じる．さらに増加させると， $k=0.09995$ で，$g(z,0)=0$ の複素共役根が単位円を内側へ横切り，再び Neimark-Sacker (NS) 分岐が生じる．さらに増加させると，$g(z,4/3)=0$ の複素共役根は $k=0.10489$で，$g(z,5/3)=0$の複素共役根は $k=0.11459$ で単位円を内側へ横切り，NS 分岐が繰り返し生じる．このように，結合強度をゼロから増加させると，NS 分岐が 4 回繰り返され，最終的には，振動停止現象が生じる．振動停止が生じた後も，さらに増加させると，$g(z,0)=0$ の根の 1 つが，$k=0.77500$で，単位円の -1 を外側へ横切る Subcritical Period-doubling (PD) 分岐によって，平衡点は不安定化し，振動停止現象は消滅する．

上記のようなアプローチを，離散 Prey-Predator 写像とエノン写像にも行った．その結果，離散 Prey-Predator 写像では，結合強度の増加に伴い，NS 分岐が連続して 4 回生じ，振動停止現象が発生した．さらに，増加すると，$g(z,5/3)=0$ の複素共役な根が単位円を内から外へ横切り，NS 分岐によって平衡点が不安定化し，振動停止現象は消滅する．また，エノン写像では，結合強度をゼロから減少させていくと， PD 分岐が連続して 4 回生じ，振動停止現象が発生した．さらに減少させると，$k=-0.84640$ で，$g(z,5/3)=0$ の根が単位円上の 1 を外側へ横切る Transcritical (TC) 分岐が生じ，振動停止現象は消滅した．

5 まとめ

本研究では，数学的には取り扱いが難しかった遅延結合高次元写像ネットワークにおいて，システム制御理論におけるロバスト安定論を駆使することで，振動停止現象を誘発する相互作用のパラメータの系統的な設計手法の提案や，誘発されるメカニズムを分岐理論で解明した．設計に関しては，従来，多数の試行錯誤が必要であったが，本研究成果により，試行錯誤に必要な負担を抑えることができた．また，誘発へのメカニズムは，同じ種類の分岐が，写像の個数だけ繰り返されていることがわかった．しかしながら，どのような写像でも，この繰り返しが生じるのか否かは，今のところ証明されていない．

【参考文献】

[1] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, Synchronization, Cambridge University Press, 2001.
[2] G. Saxena and A. Prasad and R. Ramaswamy, Amplitude death: the emergence of stationary in coupled nonlinear systems, Phys. Rep., vol.521, pp.205--228, 2012.

[3] A. Koseska, E. Volkov, and J. Kurths, Oscillation quenching mechanisms: amplitude vs. oscillation death, Phys. Rep., vol.531, pp.173--199, 2013.
[4] V. Flunkert, I. Fischer and E. Scholl, Dynamics, control and information in delay-coupled systems: an overview, Phil. Trans. R. Soc. A, vol.371, pp.20120465, 2013.
[5] D.V.R. Reddy et al., Time delay induced death in coupled limit cycle oscillators, Phys. Rev. Lett., vol.80, pp.5109--5112, 1998.
[6] S.R. Huddy and J.D. Skufca, Amplitude death solutions for stabilization of dc microgrids with instantaneous constant-power loads, IEEE Trans. Power Electronics, vol.28, pp.247--253, 2013.
[7] D.Q. Wei et al., Effects of couplings on the collective dynamics of permanent-magnet synchronous motors, IEEE Trans. Circuits and Systems II, vol.60, pp.692--696, 2013.
[8] T. Biwa, S. Tozuka, and T. Yazaki, Amplitude death in coupled thermoacoustic oscillators, Phys. Rev. Applied, vol. 3, p. 034006, 2015.
[9] G. Saxena, A. Prasad, and R. Ramaswamy, Amplitude death: The emergence of stationarity in coupled nonlinear systems, Phys. Rep. vol. 521, pp. 205 - 228, 2012.
[10] 小西，遅延相互作用が伴う大規模システムに内在する不安定平衡点の安定化，回路とシステムワークショップ 講演論文集，pp. 235 - 238, 2014.
[11] K. Konishi, Time-delay-induced stabilization of coupled discrete-time systems, Phys. Rev. E, vol.67, pp.017201, 2003.
[12] F.M. Atay and O. Karabacak, Stability of coupled map networks with delays, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., vol.5, pp.508--527, 2006.
[13] C. Masoller and A.C. Marti, Random delays and the synchronization of chaotic maps, Phys. Rev. Lett., vol.94, p.134102, 2005.
[14] G. Xiaofeng et al., Stability of the steady state of delay-coupled chaotic maps on complex networks, Phys. Rev. E, vol.77, p.056212, 2008.
[15] M. Ponce C., C. Masoller and A.C. Marti, Synchronizability of chaotic logistic maps in delayed complex networks, Eur. Phys. J. B, vol.67, pp.83-93, 2009.
[16] K. Konishi and H. Kokame, Time-delay-induced amplitude death in chaotic map lattices and its avoiding control, Phys. Lett. A, vol.366, pp.585--590, 2007.
[17] F.M. Atay, Oscillator death in coupled functional differential equations near Hopf bifurcation, J. Diff. Eqns, vol.221, pp.190-209, 2006.
[18] L.B. Le, K. Konishi and N. Hara, Topology-free design for amplitude death in time-delayed oscillators coupled by a delayed connection, Phys. Rev. E, vol.87, p.042908, 2013.
[19] L. Atanassova, D. Hinrichsen, and V.L. Kharitonov, in Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, vol.228, pp.72--91, 1998.

〈発　表　資　料〉

題　　名	掲載誌・学会名等	発表年月
Amplitude death in high-dimensional map networks with connection delays	Proc. of International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, pp. 719-722	2014 年 09 月
遅延結合された高次元写像ネットワークに振動停止現象を誘発する結合パラメータの設計	電子情報通信学会 非線形問題研究会 信学技報 NLP2014-20	2014 年 06 月
遅延結合写像ネットワークに生じる振動停止現象の安定化メカニズム	電子情報通信学会 非線形問題研究会 信学技報 NLP2014-102	2014 年 12 月

振動停止現象が誘発される遅延結合写像ネットワークの系統的な設計手順	電子情報通信学会 非線形問題研究会 信学技報 NLP2014-151	2015 年 03 月