

弛張発振器の雑音誘起同期現象の解析と情報通信システムへの応用

研究代表者 神野健哉 日本工業大学工学部電気電子工学科 教授

1 はじめに

本研究は複数の発振回路に対して相関の強い雑音を印加した際に発振器が呈する「雑音誘起同期現象」の理論解析を行い、実装回路でこれを検証することである。同期現象は非線形結合振動子にみられる特徴的な現象である。同期現象は、非線形振動子が互いに影響を与えて同一の発振周波数になる相互同期現象とある周波数の信号が入力されることによってその周波数に引き込まれる注入同期現象とに大別することができる。自然界に存在する相関の強い雑音を用いて同期を達成することができれば、従来の通信における通信機器間の同期を簡素な回路を用いて低電圧で実現できる。このような相関の強い雑音で同期を実現することができれば、機器間を接続する必要がなくなるため、現在の機器間の配線よりも大幅に削減できる可能性がある。これにより集積回路のより小型化を図ることができる可能性があるため、近年注入同期回路に関する研究が集積回路分野では盛んに行われている。

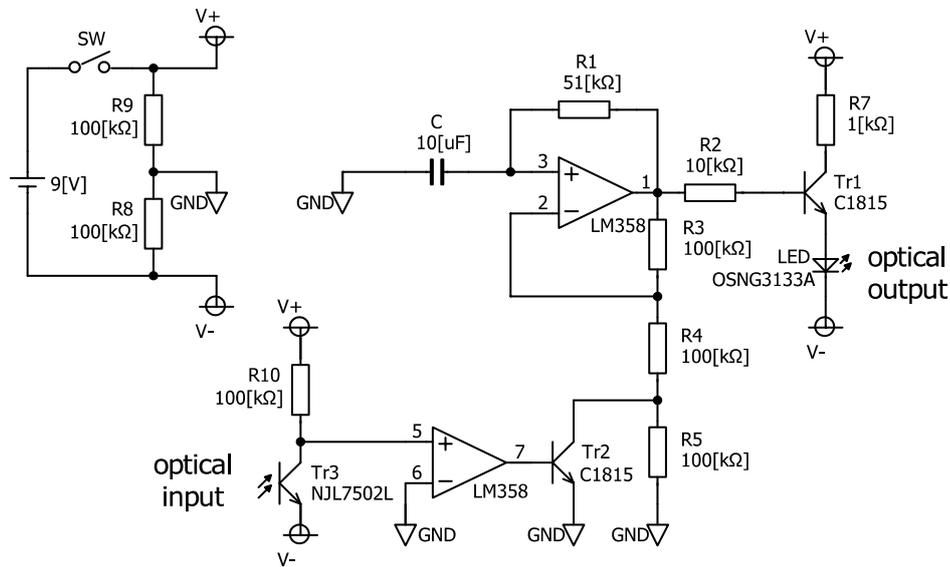


図 1 発振回路

本研究では複数の発振器に対して共通信号を印可した際、すなわち注入同期現象に着目して研究を行った。このような注入同期では、周期外力による位相ロックや、ノイズによるノイズ同期が知られている。このうち、ノイズ同期は実応用を考える上では同期範囲に関する検討が不十分である。このような背景のもと、我々は振動子として理論解析が容易であり、かつ比較的発振器の個体差の調整が容易でかつ入力信号によってしきい値が駆動される図 1 に示すような区分線形弛張発振回路を用いた。この発振器はしきい値が 2 値外力で駆動される。このモデルの特徴は厳密な解析が比較的容易であることである。そのため、ある程度非周期的な信号においても、厳密な解析が行える。弛張発振器モデルでは、相互結合系における同期現象の解析や周期外力注入時の特性解析がこれまでに進んでいる。周期外力注入時には、外力に対し周波数ロックが発生し、また、2パラメータ平面上でアーノルドの舌が見られることがわかっている。

本研究では外力の時間的構造をランダムにした非周期的な信号で弛張発振器のしきい値を駆動した場合に見られる現象を調査した。しきい値が駆動される弛張発振器を電子回路により実装し、回路実験で現象を確認する。本報告ではこの系に非周期信号である、パルス間隔がランダムに変化するパルス波を注入した際に呈する現象に関して解析を行った。

2 システム

本報告で取り扱う区分線形弛張発振回路は次式で表される

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = -x(t) + y(t) \\ y(t) = h(t, x(t)) = \begin{cases} 1 & x(t) \leq S(t) \\ -1 & x(t) \geq W(t) \end{cases} \\ S(t) = (a_1 - a_2)u(t) + a_2 \\ W(t) = b \\ -1 < b < a_2 < a_1 < 1 \end{cases} \quad (1)$$

ここで $x(t)$ は内部状態変数、 $y(t)$ は 2 値ヒステリシス、 $S(t)$ 、 $W(t)$ は 2 値ヒステリシスのしきい値である。しきい値 $S(t)$ は $\{0, 1\}$ の 2 値外力 $u(t)$ により駆動される。結果、 $S(t)$ は a_1 、 a_2 の 2 値をとる。

図 2 に本システムの状態変数の時間波形の例を示す。本発振器は、上下のしきい値の間で $x(t)$ が弛張発振するシステムであり、外力で上側のしきい値 $S(t)$ が駆動される。このシステムは区分線形一階微分方程式で記述されており、厳密な解析が容易に行える。

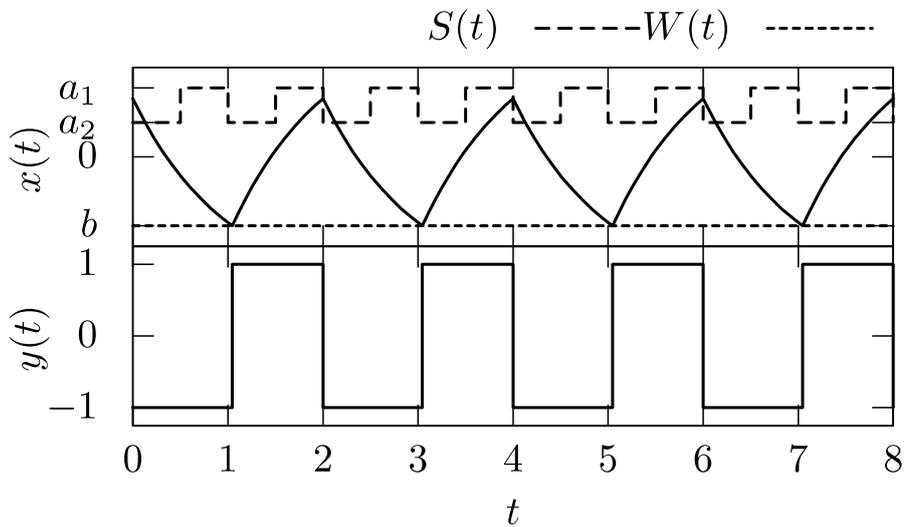


図 2 発振波形例

2-1 周期外力注入により見られる同期現象

この弛張発振器に周期外力を注入すると、外力に対し周波数ロックを起こす。このとき、外力の強さと周期を変化させると、様々な比率で同期現象が観測できる。図 3 に外力の強さと周期を変化させたときに見られる同期現象の変化を示す。

この図の横軸は外力の周期 T 、縦軸は外力の強さに相当するしきい値の差 $a_1 - a_2$ を表す。色は、以下の式で定義される外力と弛張発振器のスイッチング比 γ を表す。

$$\gamma = \frac{\text{同期周期内での } y(t) \text{ の変化回数}}{\text{同期周期内での } u(t) \text{ の変化回数}}$$

この図の黒い部分は準周期状態を表しており、それ以外の部分は外力に対し何らかの比率で同期している。このように弛張発振器は周期外力に対し、アーノルド舌となる同期領域を有する。このようなアーノルドの舌は弛張発振器モデルが有する周期調整能力によるものである。図 4 に $\gamma=1$ のときの発振波形の例を 2 つ示す。この 2 つはそれぞれアーノルドの舌の端で見られる発振であり、図 4(a) は外力の周期が長いとき、図 4(b) は外力の周期が短いときである。図からわかるように、外力の周期に応じ、内部状態の切り替わり点に変化し、結果、弛張発振器の周期が外力の周期に一致するように調整される。

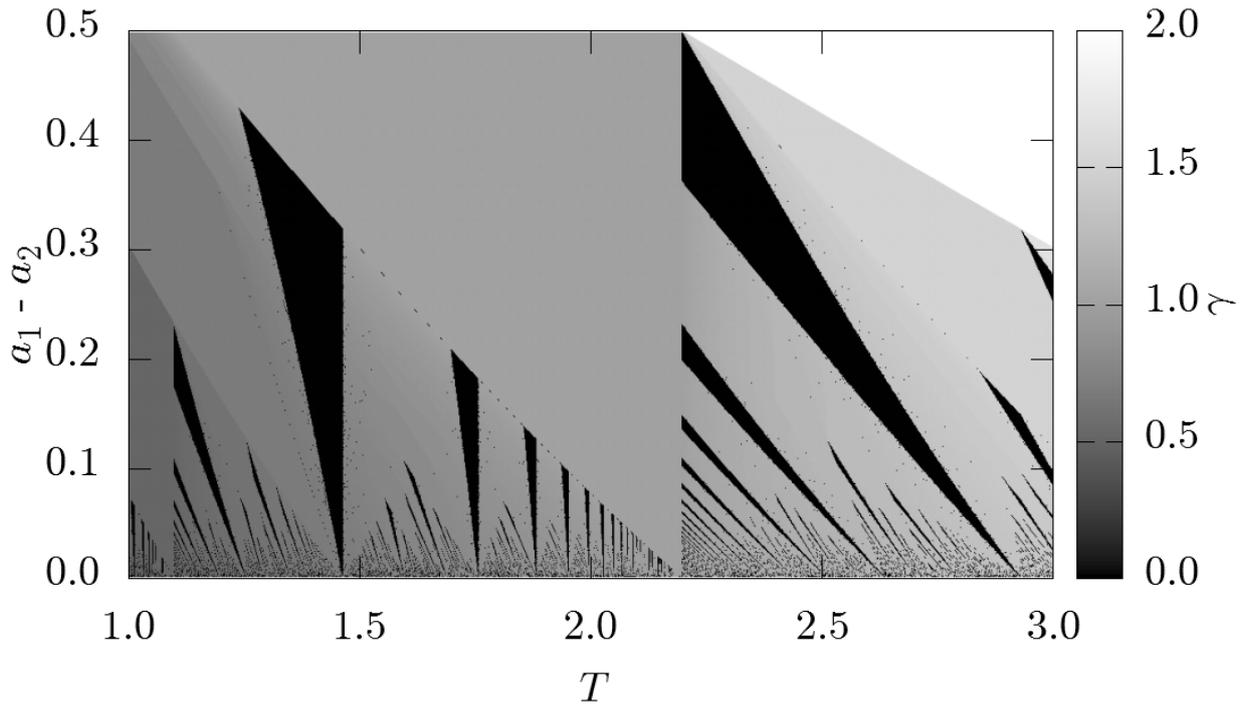


図3 2パラメータ平面上に見られるアーノルドの舌 ($a_1=0.5$)

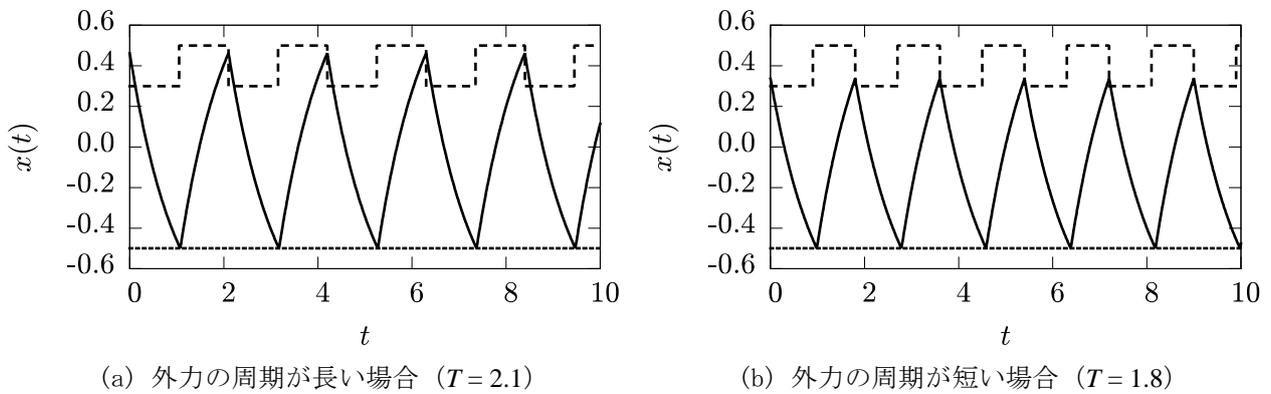


図4 $\gamma=1$ のときの信号例 ($a_1=0.5$, $a_2=0.4$, $b=-0.5$)

2-2 回路実験

周期外力に対して本系ではアーノルドの舌が観測できる。これに対し、外力が非周期的であるときの本系の応答を調査する。本稿で用いた非周期的な外力の概要を図5に示す。注入する非周期的な信号は、立ち上がり間隔がランダムで変化し、立ち下りは必ず立ち上がり間隔の中心に現れるようなパルス波である。このように設定することで、各パルスのデューティ比は必ず50%で、各パルスの周期が異なるパルス波となり、立ち上がり間隔の分布が外力の周波数分布となる。

このような非周期信号を外力として与えた際の同期状態の変化を回路実験により調査する。図1示した回路で実験を行った。この回路は光2値外力によりしきい値が駆動される。光で信号を注入する理由は、弛張発振器間を絶縁するためである。このように各実装弛張発振器の入出力は光で行われるため、一種の電子ホ

タルであるといえる。図 6 に実験に用いたシステムを示す。3 個の電子ホタルに外力生成回路で生成した外力を共通信号として注入した際に見られる現象を調査した。各電子ホタルの発振状態および非周期外力信号を各チャンネル間が絶縁されているデータロガー（日置電機 LR8402）で記録した。

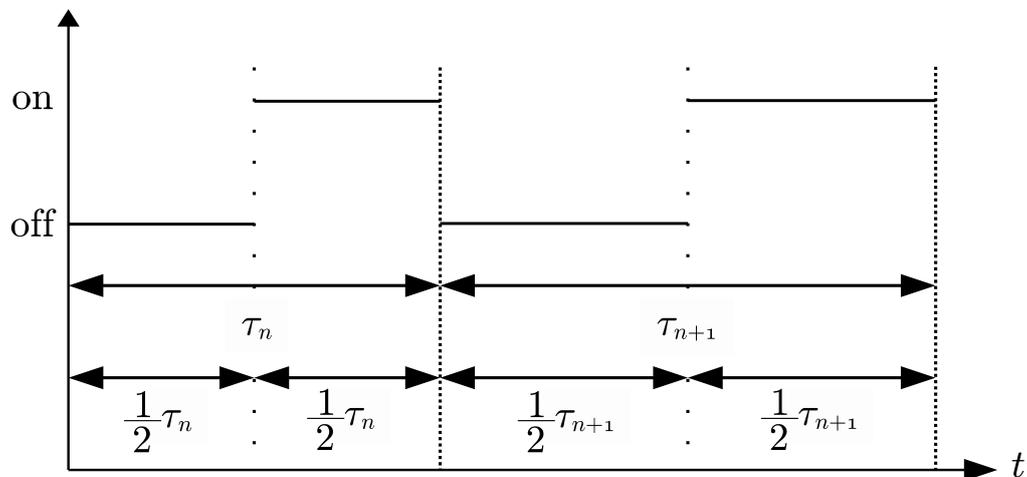


図 5 非周期外力の概要

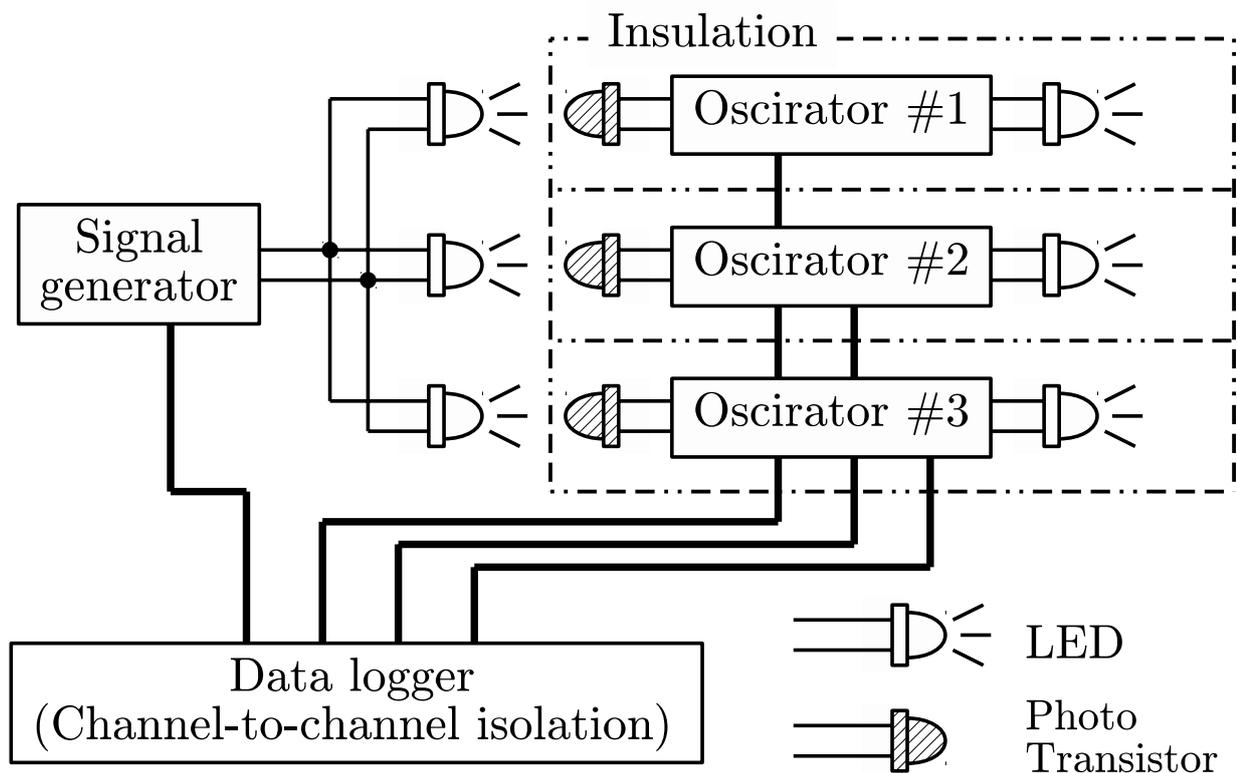


図 6 実験システム

2-3 予備実験

まず，電子ホタルの特性を調査する．電子ホタルのしきい値は $a_1=0.5$ ， $a_2=0.4$ ， $b=-0.5$ となるよう設定した．実験に用いた電子ホタルの実測発振周期を表 1 に示す．表 1 で on は光入力があるときの発振周期，off は光入力がないときの発振周期である．実装回路素子の誤差に起因して各電子ホタルの発振周期は異なっている．

表 1 各電子ホタルの定常発振周期

	発振周期 [ms]	
	On	Off
Osc #1	230.9	203.3
Osc #2	236.2	208.5
Osc #3	226.0	198.8

図 7 に，各電子ホタルの発振波形を示す．図 7(a) は出力電圧波形を，図 7(b) は出力電圧波形の立下りをパルス列にしたものである．各電子ホタルの発振周期が異なるため，パルスが揃わず，発振が独立であることがわかる．同期状態を示すには立下りパルス列のほうが適しているので，以下，出力波形は図 7(b) のような立ち下がりパルス列で表す．

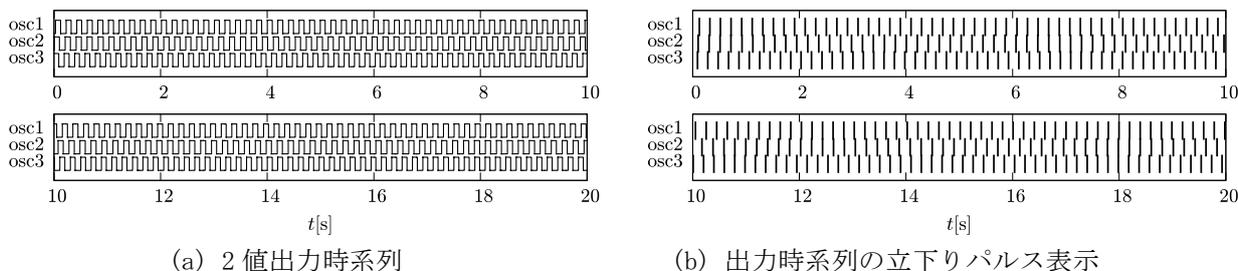


図 7 光入力が off のときの発振の様子

同期の状態を数値的に表すため，相関係数を計算する．サンプリング間隔 2[ms]，測定時間 3[min] として，データロガーにより計測されたデータを用いる．結果を表 2 に示す．これらの結果も，各電子ホタルの発振が独立していることを示している．

表 2 電子ホタル間の特性量

	相関係数
Osc #1-Osc #2	-0.00019
Osc #1-Osc #3	0.00015
Osc #2-Osc #3	-0.00321

2-4 周期外力注入時

次に周期矩形波を外力として注入する．周期外力を注入すると，外力に対し周波数ロックを起こし，結果として各電子ホタルが同期するはずである．しかし，各電子ホタルの実装回路素子には誤差が存在するので，各電子ホタルに対応したアーノルドの舌にはその分のずれが生じる．このため，各同期領域の端では各電子ホタル間の同期は達成できなくなると考えられる．与える外力の周期は，50[ms] から 350[ms] まで 2[ms] 刻みで与えた．測定はデータロガー（日置電機 LR8402）を用いて，サンプリング間隔 2[ms]，測定時間 3[min] で，周期外力および各電子ホタルの出力を記録した．

外力に対する相関係数の変化を図 8 に示す．図 8(a) を見ると， $T=210$ [ms] 付近で外力に対し同期している．また，予想されたように，各電子ホタルの発振周波数の相違により，同期領域の範囲が各電子ホタルで異な

る。図 8(b)は各電子ホタル間の相関係数を示している。外力に対し同期範囲が重複する範囲で、各電子ホタル間で達成していることが分かる。

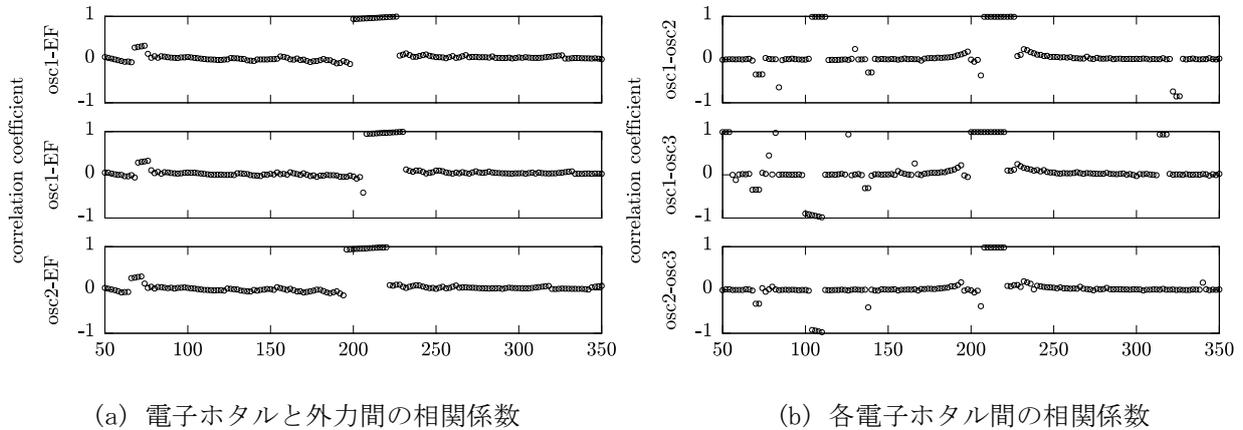


図 8 外力周期 T と相関係数

図 9 は発振波形の例を示す。図 9(a)は同期範囲の中心付近である $T=210$ [ms] の場合の波形例である。この場合、3つの電子ホタルが完全に同期していることが分かる。図 9(b)は同期範囲の端である $T=200$ [ms] の場合の波形例である。この場合、Osc #2 の電子ホタルでは同期が達成されず、その他の電子ホタルは周期外力に対して同期が達成している。すなわち、同期領域の端では電子ホタルの固有発振周波数の相違に起因して、完全同期が発生しづらいことが確認できる。

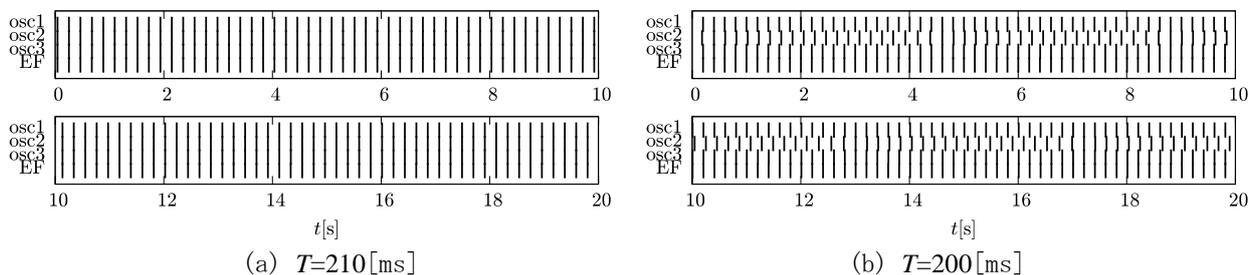


図 9 周期外力注入時の発振波形例

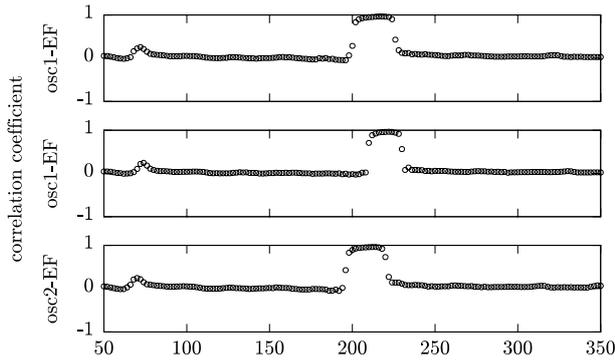
2-5 立ち上がり間隔が一様分布で変化する非周期外力

次に、立ち上がり間隔が一様分布に従うような非周期的パルス外力をシステムに注入する。実験では、立ち上がり間隔 τ_n が次のような一様分布に従うものとした。

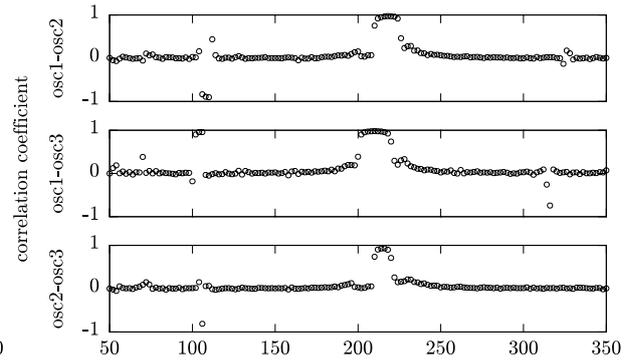
$$\tau_n = \text{Uniform}(T - \Delta T, T + \Delta T)$$

これは、期待値 T を中心に $\pm\Delta T$ だけスイッチ間隔が変動し、 $T \pm \Delta T$ 内は一様に分布することを表す。本実験では $\Delta T = 10$ [ms] とし、 T は 50[ms] から 350[ms] まで 2[ms] 刻みで変化させた。また、測定はデータロガー（日置電機 LR8402）を用いて、サンプリング間隔 2[ms]、測定時間 3[min] とし非周期パルス外力と各電子ホタルの出力を記録した。

実験結果を図 10 に示す。図 10 は外力に対する相関係数の変化を表す。周期外力を注入したときに比べると、同期の範囲が狭くなっている。これは、同期が外れるような周期のパルスが含まれることにより、ときどき同期がはずれ、結果として相関係数が低くなってためである。



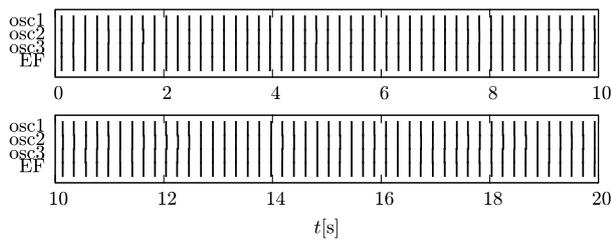
(a) 電子ホタルと外力間の相関係数



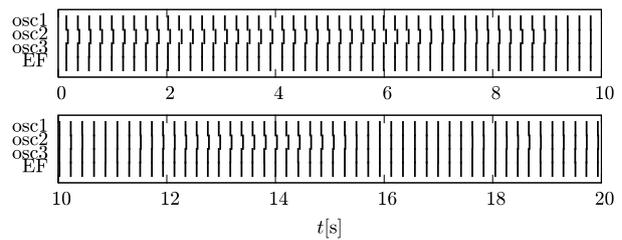
(b) 各電子ホタル間の相関係数

図 10 周期期待値 T と相関係数

図 11 に発振波形例を示す. 図 11(a)は $T=212$ [ms]の波形例を示す. 外力が非周期的であるにもかかわらず, 立下りパルス位置が揃っており, 完全同期が達成されている. 図 11(b)は $T=210$ [ms]における波形例を示す. この場合は, とくどき同期が外れるものの, 再び同期状態を達成するような現象が見られ, 一種の確率的同期といえる. このように, 同期が外れやすくなるのが, 同期範囲が狭くなることの一因であると推測できる.



(a) $T=212$ [ms]



(b) $T=210$ [ms]

図 11 非周期外力注入時の発振波形例

以上の実験結果から, しきい値が 2 値外力により駆動される電子ホタルに対し, 非周期的な信号を外力として与えた結果, 非周期的な信号が注入されているにもかかわらず, 完全同期を達成する現象や, 同期状態が確率的に変化する領域が見られることを確認した. そこで次節以降でこれらの現象を理論解析する.

3 解析

本システムは, 2 値パルス波外力でしきい値が駆動される. そのため, 図 12 に示すように, しきい値 (外力) が立下がるタイミングで離散化できる. これにより, 状態 (x, y) の系列が得られる.

ここで, 図中の (x_{n+1}, y_{n+1}) では, しきい値の立下がりに合わせ, y の値が変化している. この場合では, y_{n+1} は立下がる直前の値をとり, すなわち, $y_{n+1}=1$ である. ここで状態を一次変数 θ へと写像として扱う. この θ はリミットサイクル上の位置を表すため位相と呼ぶ. f_1 は状態を位相へ写す写像である. これにより, random phase map である写像 $G_{(T_2^n, T_1^n)}$ を定義できる. T_2^n, T_1^n は n 番目のパルスの間隔を表し, T_2^n はしきい値が a_2 である期間, T_1^n はしきい値が a_1 である期間を表す.

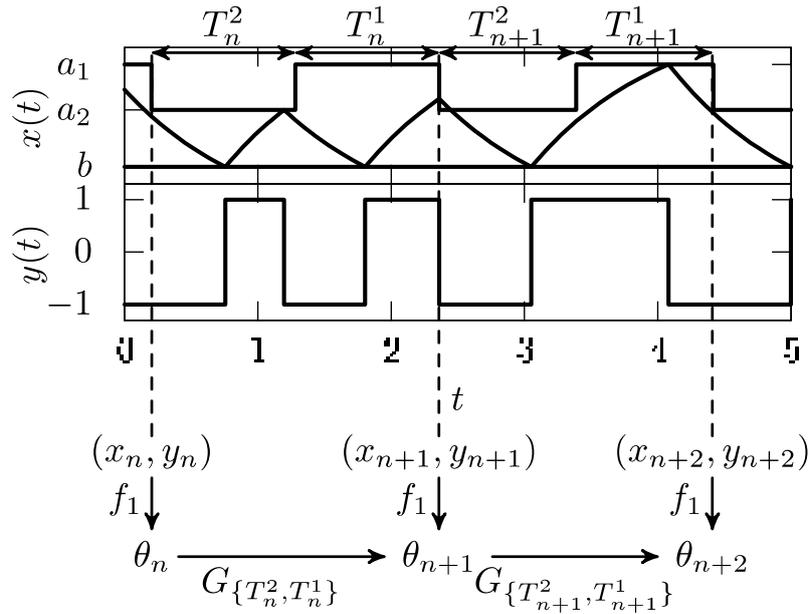


図 12 発振状態の離散化

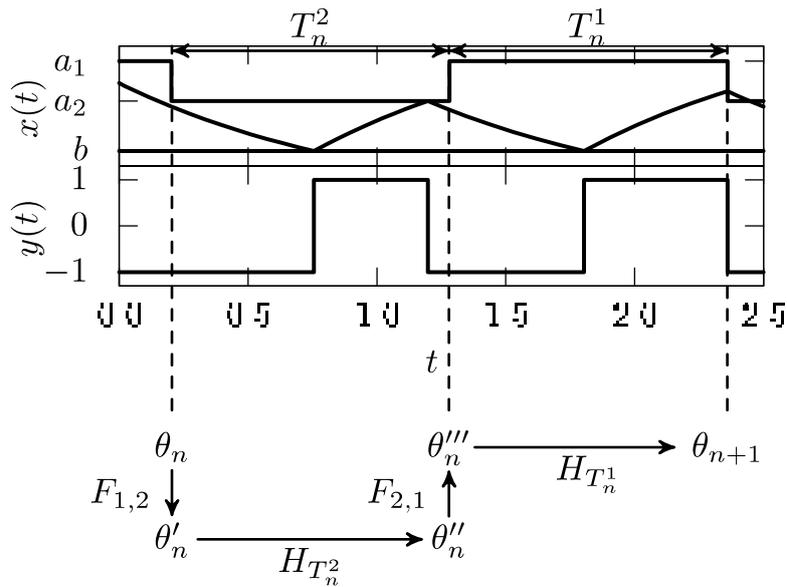


図 13 写像 $G_{\{T_{2n}, T_{1n}\}}$ の構造

写像 $G_{\{T_{2n}, T_{1n}\}}$ は確率的に決定する要素を含むため、random phase map と呼ばれる。この写像について、もう少し詳しく考える。 θ_n から θ_{n+1} への遷移は、図 13 に示すように、4 回の遷移によりなされる。

1. しきい値が a_1 から a_2 へ変化 ($F_{1,2}$)
2. しきい値が a_2 で T_n^2 の期間発振 ($H_{T_n^2}$)
3. しきい値が a_2 から a_1 へ変化 ($F_{2,1}$)
4. しきい値が a_1 で T_n^1 だけ発振 ($H_{T_n^1}$)

1, 3 ではしきい値の変化に伴いリミットサイクルの形状が変化し、結果として、位相の変化が起きる。2, 4 ではしきい値は一定で、一定期間、発振することによる遷移である。つまり、本システムは 2 つのリミットサイクルの間で遷移をしながら発振していると捉えることができる。この 4 つの写像の合成により写像 $G_{\{T_{2n}, T_{1n}\}}$ を定義できる。

3-1 位相の定義

状態を一次元で表現する位相について説明する. あるしきい値 a_1, a_2, b を持つ弛張発振器のリミットサイクルは図 14 に示す集合 D_j, U_j により構成される. よって, リミットサイクルを表す状態変数空間上の集合 I_j は次のように定義される.

$$\begin{cases} D_j & \equiv \{(x, y) \mid y = -1, b < x \leq a_j\} \\ U_j & \equiv \{(x, y) \mid y = 1, b \leq x < a_j\} \\ I'_j & \equiv D_j \cup U_j \end{cases}$$

ここで, しきい値が a_1 から a_2 へ変化する場合を考える. すると, 状態は集合 I_2 に含まれない値となる. この領域を K とする.

$$K \equiv \{(x, y) \mid y = -1, a_2 < x \leq a_1\}$$

この K に含まれる状態を採る場合も, 時間経過により I_2 内へ移動する. すなわち, K はしきい値が a_1 から a_2 へ変化した場合に生まれる過渡状態を表している. また, しきい値が a_2 から a_1 に変化する場合, 状態はすべて I_1 に含まれるため, 過渡状態は無いことに注意する. この過渡状態も含めた, あるしきい値 a_j のときに採ることができる状態集合を I_j とする.

$$\begin{cases} I_1 & \equiv I'_1 \\ I_2 & \equiv I'_2 \cup K \end{cases}$$

この過渡状態も含めた状態を表現する位相を定義する. まず, リミットサイクル上の状態は, $[0, 2\pi]$ へ写像するものとする. また, しきい値が a_j の場合に, 状態 $(a_j, -1)$ を採るとき, 位相が 0 であるとする. そして, 過渡状態は 0 を起点とし, 負の位相で表現するものとする. その理由は後述する. すると, 状態 (x, y) と位相 θ の関係を表す写像 f_j は次のように定義される.

$$\begin{aligned} f_j &: I_j \rightarrow J_j, \quad (x, y) \rightarrow \theta \\ f_j(x, y) &= \begin{cases} f_{D_j}(x) & \text{for } y = -1 \\ f_{U_j}(x) & \text{for } y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f_{D_j}(x) &= \omega_j \ln((a_j + 1)/(x + 1)) \\ f_{U_j}(x) &= \omega_j \ln((b - 1)/(x - 1)) + \phi_j \\ \phi_j &= \omega_j \ln((a_j + 1)/(b + 1)) \end{cases} \\ \tau_j &= \ln \frac{a_j + 1}{b - 1} \frac{b + 1}{a_j - 1} \\ \omega_j &= 2\pi/\tau_j \\ \begin{cases} J_1 & \equiv \{\theta \mid 0 \leq \theta < 2\pi\} \\ J_2 & \equiv \{\theta \mid -\theta_a \leq \theta < 2\pi\} \\ \theta_a &= -f_2(a_1, -1) \end{cases} \end{aligned}$$

ここで, f_{D_j} は集合 D_j に含まれる x と位相の関係, f_{U_j} は集合 U_j に含まれる x と位相の関係を記述する写像である. また, f_{D_2} は集合 K に含まれる x と位相の関係も合わせて記述する. τ は固有周期, ω_j は正規化係数である. J_j は位相の定義域を表し, 特に J_2 は過渡状態 (負の位相) を有することに注意する. θ_a は過渡状態部分の下限を表す.

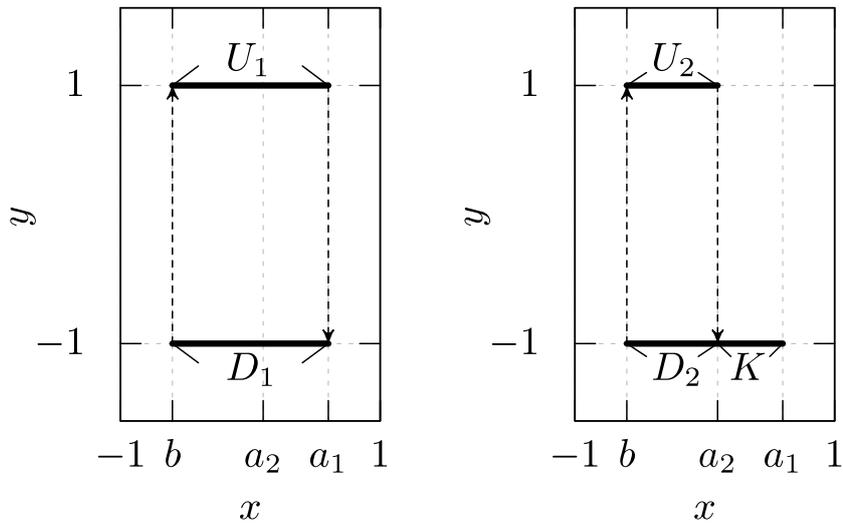
逆に、位相 θ から状態 (x, y) への写像である、 f_j の逆写像 f_j^{-1} は次のようになる。

$$f_j^{-1} : J_j \rightarrow I_j, \theta \rightarrow (x, y)$$

$$f_j^{-1}(\theta) = \begin{cases} \left(f_{D_j}^{-1}(\theta), -1 \right) & \theta < \theta_j \\ \left(f_{U_j}^{-1}(\theta), 1 \right) & \theta_j \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{D_j}^{-1}(\theta) = (a_j + 1) \exp(-\theta/\omega_j) - 1 \\ f_{U_j}^{-1}(\theta) = (b - 1) \exp(-(\theta - \phi_j)/\omega_j) + 1 \end{cases}$$

ここで、 $f_{D_j}^{-1}$ は f_{D_j} の、 $f_{U_j}^{-1}$ は f_{U_j} の逆関数である。



(a) しきい値が a_1 のとき

(b) しきい値が a_2 のとき

図 14 リミットサイクル集合と過渡状態集合

3-2 遷移写像 $F_{1,2}$ $F_{2,1}$

外力により、しきい値が切り替わると、リミットサイクル形状が変化し、それに伴い、位相にも変化が生まれる。その位相の変化を表す遷移写像を導出する。

しきい値が a_2 から a_1 に変化した場合、状態に変化は生じない。しかし、 a_1 から a_2 に変化した場合、ヒステリシスのしきい値の変化により、 y が1で、 x が a_2 より大きい場合、 y が-1へ変化する。この状態の変化を記述する写像を g と置き、次のように記述する。

$$g(x, y) = \begin{cases} (x, -y) & y = 1 \text{ AND } a_2 < x \\ (x, y) & \text{otherwise} \end{cases}$$

これにより、 a_1 から a_2 に遷移した場合の位相の変化を表す写像 $F_{1,2}$ 、 a_2 から a_1 に遷移した場合の写像 $F_{2,1}$ は次のように定義される。

$$F_{1,2} : J_1 \rightarrow J_2, \theta \rightarrow \theta$$

$$F_{1,2} = f_2 \circ g \circ f_1^{-1}$$

$$F_{2,1} : J_2 \rightarrow J_1, \theta \rightarrow \theta$$

$$F_{2,1} = f_1 \circ f_2^{-1}$$

この $F_{1,2}$ 、 $F_{2,1}$ の具体的な関係式は次のように記述される。

$$F_{1,2}(\theta) = \begin{cases} \frac{\omega_2}{\omega_1} \theta - \theta_a & 0 < \theta \leq \theta_s \\ \omega_2 \ln \frac{a_2+1}{(b-1) \exp(-(\theta-\theta_1)/\omega_1)+2} & \theta_s < \theta < 2\pi \end{cases}$$

$$F_{2,1}(\theta) = \frac{\omega_1}{\omega_2}(\theta + \theta_a), \quad -\theta_a \leq \theta < 2\pi$$

$$\theta_s = f_1(a_2, 1)$$

ここで、 θ_s はしきい値の変化による状態の変化が起きる領域の境界を表す。

3-3 時間発展 $H_{T1n} H_{T2n}$

位相は時間に対し線形に増加するよう定義されているため、しきい値が一定の場合における時間経過による位相の変化を表す写像 $H_{T1n} H_{T2n}$ は次のようになる。

$$H'_{T_n^j}(\theta) = \theta + \omega_j T_n^j, \quad T_n^j > 0$$

過渡状態は負の位相で表現され、位相が0の点で滑らかにリミットサイクルへ接続されているため、過渡状態（つまり $\theta < 0$ ）でも正しく計算が可能である。ただし、 T_j が負の場合、定常状態と過渡状態を判別できないため、この方法では計算できない。

また、次の写像により、写像 H'_{T_j} を集合 J_j 内の写像とする。

$$H_{T_n^j}(\theta) = M(H'_{T_n^j}(\theta))$$

$$M(\theta) = \begin{cases} \theta & \theta < 0 \\ \theta \bmod 2\pi & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで、 $M(\theta)$ は θ が正の場合のみ剰余を行う関数である。位相は正の値のとき、 2π の周期性を持つが、過渡状態を表す負の場合は周期性を持たない。そのため、このような特別な剰余関数により領域を制限する。

3-4 写像 $G_{\{T2n, T1n\}}$

これまでに得られた4つの写像の合成により、本システムの動作を表す写像 $G_{\{T2n, T1n\}}$ を導出できる。

$$G_{\{T_n^2, T_n^1\}} : J_1 \rightarrow J_1, \quad \theta \rightarrow \theta$$

$$G_{\{T_n^2, T_n^1\}} = H_{T_n^1} \circ F_{2,1} \circ H_{T_n^2} \circ F_{1,2}$$

$$\theta_{n+1} = G_{\{T_n^2, T_n^1\}}(\theta_n)$$

図15に写像 G の一例を示す。写像 G は、勾配が1である領域と、非線形な形状を持つ領域で構成されている。図中の各 $\theta_{\{-\theta_a\}}^{T_1}$ 、 $\theta_{\{0\}}^{T_1}$ 、 $\theta_{\{2\pi\}}^{T_1}$ は次のように定まる。

$$\begin{cases} \theta_{\{-\theta_a\}}^{T_1} & = H_{T_1} \circ F_{2,1}(-\theta_a) \\ \theta_{\{0\}}^{T_1} & = H_{T_1} \circ F_{2,1}(0) \\ \theta_{\{2\pi\}}^{T_1} & = H_{T_1} \circ F_{2,1}(2\pi) \end{cases}$$

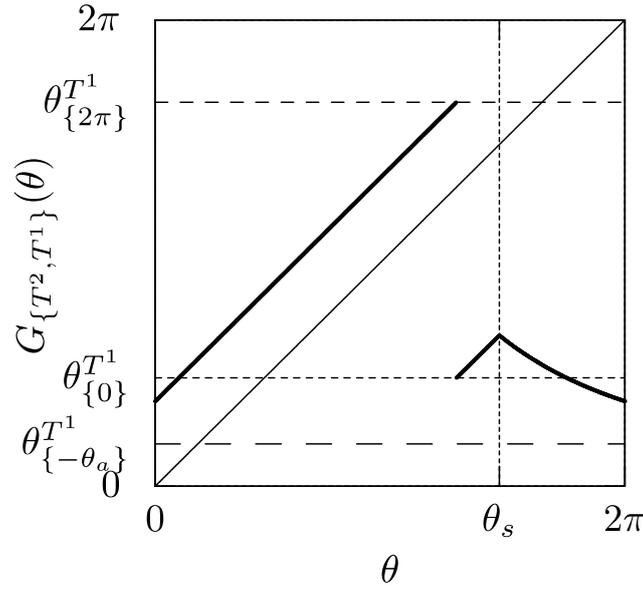


図 15 写像 $G_{\{T^2, T^1\}}$ の一例 ($a_1=0.5, a_2=0.1, b=-0.5, T^2=T^1=0.2$)

これらは、 $F_{2,1}$ の値域 J_2 におけるリミットサイクルを表現する境界 $0, 2\pi$ と、過渡状態を表現する境界 $-\theta_0, 0$ を写したものである。

4 勾配解析

写像 $G_{\{T^2, T^1\}}$ の持つ特徴を、その傾きを見ることで解析する。写像 $G_{\{T^2, T^1\}}$ の導関数 $DG_{\{T^2, T^1\}}$ は次のように導出される。

$$\begin{aligned}
 DG_{\{T^2, T^1\}}(\theta) &= DG(\theta) \\
 &= \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta < \theta_s \\ \frac{d}{d\theta} f_{D_2} \circ f_{U_1}^{-1}(\theta) & \theta_s \leq \theta < 2\pi \end{cases} \\
 \frac{d}{d\theta} f_{D_2} \circ f_{U_1}^{-1}(\theta) &= \frac{\frac{d}{d\theta} f_{U_1}^{-1}(\theta)}{\left. \frac{d}{d\phi} f_{D_2}^{-1}(\phi) \right|_{\phi=F_{1,2}(\theta)}} \\
 &= \frac{f_{U_1}^{-1}(\theta) - 1}{f_{U_1}^{-1}(\theta) + 1}
 \end{aligned}$$

ここで、式中の $f_{U_1}^{-1}(\theta)$ は外力が切り替わるときの状態 x を表していることに注意する。写像 $G_{\{T^2, T^1\}}$ の導関数は、 T^1, T^2 に依存せず、しきい値にのみ依存する。そのため、写像 $G_{\{T^2, T^1\}}$ の導関数を DG と表記する。また、上式から G の非線形部分の傾きは、しきい値が切り替わる瞬間の状態 x の値で決まることがわかる。

$DG(\theta)$ が採れる値は次のように分類できる。

$$\begin{cases} DG(\theta) = 1 & 0 \leq \theta < \theta_s \\ -1 < DG(\theta) < 0 & \theta_s \leq \theta < 1 \text{ AND } 0 < f_{U_1}^{-1}(\theta) \\ DG(\theta) \leq -1 & \theta_s \leq \theta < 1 \text{ AND } f_{U_1}^{-1}(\theta) \leq 0 \end{cases}$$

ここで状態 x が採る値は、しきい値により制限されることに注意すると、 $DG(\theta)$ の傾き、すなわち、システムの性質はしきい値で変化することがわかる。これは、次の3つに分類できる。

- A. $0 < a_2 < a_1$ (常に $|DG(\theta)| < 1$)
- B. $a_2 < 0 < a_1$
- C. $a_2 < a_1 < 0$ (常に $|DG(\theta)| > 1$)

Aの場合非常に強い同期現象が見られるといえる。

5 外力の影響

前節に示した A の場合に関して、外力の影響を考察する。外力のパルス幅の分布が指数分布である場合には、文献[9][10]と同様の結果が得られ、同期が達成される。今回は、周期外力に近い性質を持つ非周期外力の場合の影響を考えるため、次のような一様分布により決まる外力を考える。

$$T_n^1 = T_n^2 = \frac{T + \text{Uniform}(-\Delta T, +\Delta T)}{2}$$

これは、パルスの間隔が期待値 T を中心に $\pm\Delta T$ だけ変動することを意味する。この $T \pm \Delta T$ は、外力の周期(周波数)分布となる。

まず、この外力を与えた場合の発振の状態を考える。しきい値を $a_1 = 0.5, a_2 = 0.4, b = -0.5$ とした2つの弛張発振器に先の外力を注入する。まず、期待値 T が発振器の固有周期とほぼ同じ値である 2.1 である場合を考える。結果を図 16 に示す。図 16(a)は $\Delta T = 0.0$ の場合、すなわち周期外力の場合である。図 16(b)は $\Delta T = 0.5$ の場合である。各図とも各発振器の位相を表示している。結果を見ると、両者とも、安定した完全同期を達成していることが確認できる。

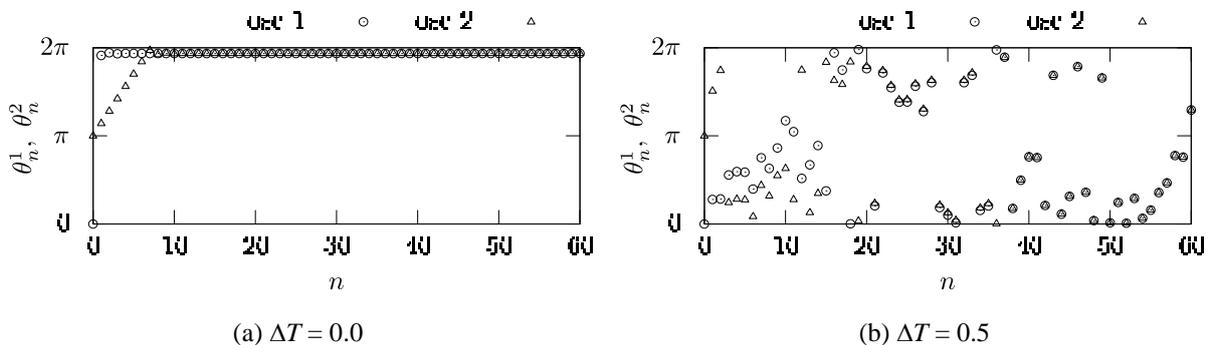


図 16 位相の時間による変化 ($a_1 = 0.5, a_2 = 0.4, b = -0.5, T = 2.1$)

次に、期待値 T が 1.0 である場合を考える。これは、固有周期のほぼ半分である。結果を図 17 に示す。図 17(a)は $\Delta T = 0.0$ の場合、すなわち周期外力の場合である。図 17(b)は $\Delta T = 0.1$ 、図 17(c)は $\Delta T = 0.2$ の場合である。各図とも各発振器の位相を表示している。周期外力の場合、位相差が 0 ならず、しかし、安定した状態となることがわかる。

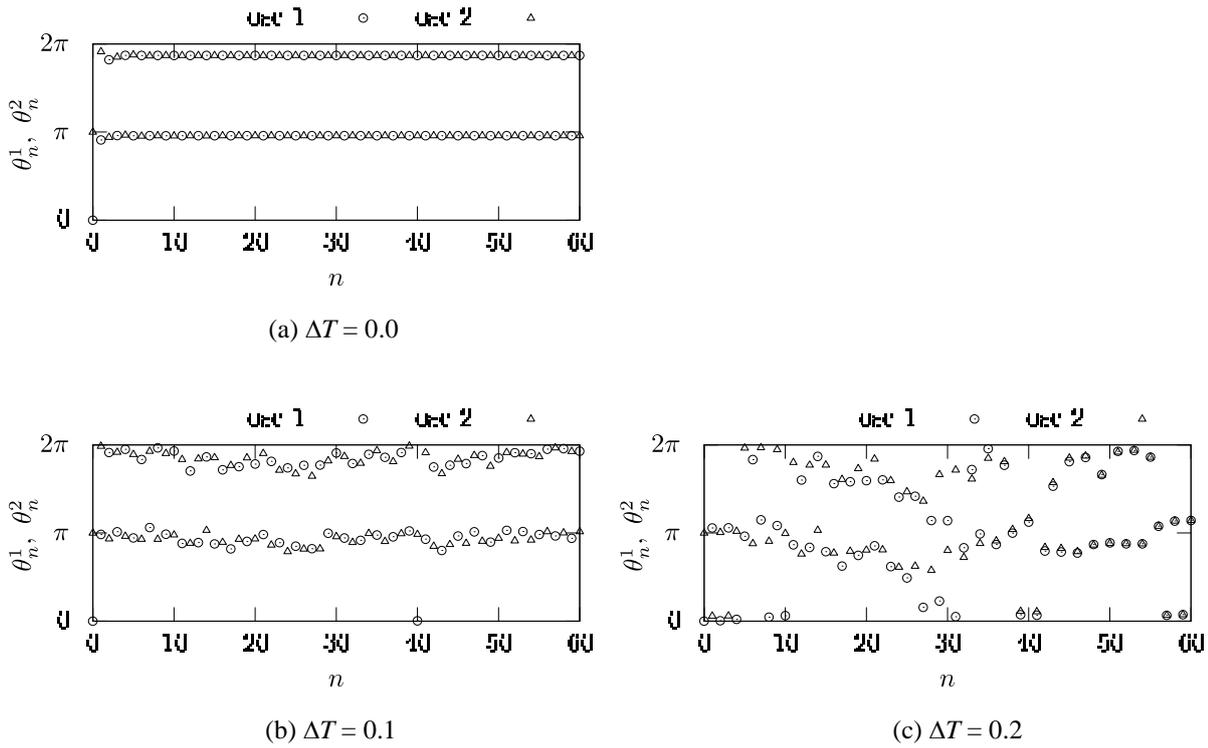


図 17 位相の時間による変化 ($a_1 = 0.5, a_2 = 0.4, b = -0.5, T=1.0$)

このときの G の 2 回写像の概形を図 18 に示す. この図からこの写像は, 外力に対し, 2 周期安定点が存在する. つまり, 図 17(a) では, 2 つの発振器はそれぞれ別の安定点に収束している. パルス幅に弱い揺らぎを与えた図 17(b) の場合も, 位相系列は不規則ながらも, 2 つの発振器は別の解軌道をとっている. しかし, パルス幅に強い揺らぎを与えている図 17(c) の場合, 2 つの発振器は同期している. このことから, パルス幅が揺らぐことで, 周期外力の場合に存在する複数の安定点が 1 つに収束することで, 完全同期が達成されやすくなるといえる.

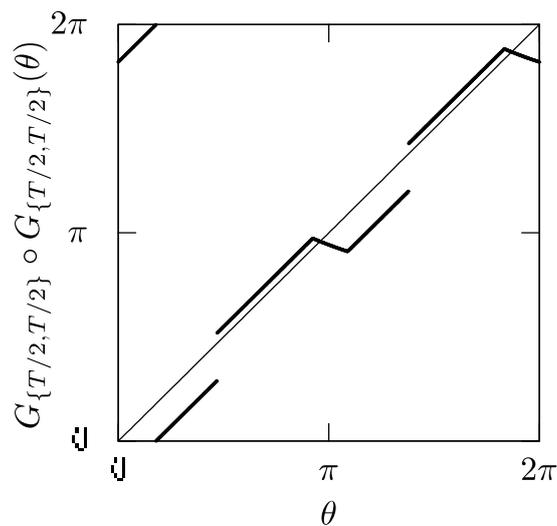


図 18 図 17 と同じセッティング($a_1 = 0.5, a_2 = 0.4, b = -0.5, T=1.0$)での 2 回写像

ΔT と同期の関係をより広い範囲で確認する。そのために、ある $T, \Delta T$ の外力が与えられたときに、10000 個のパルスを入力したときの、2つの弛張発振子の位相差を確認する。その結果を図 19 に示す。図 19 の横軸、縦軸はそれぞれ、 $T, \Delta T$ を表し、色は 10000 パルスが注入された後の位相差を表しており、白は位相差がないことを表す。この結果から、揺れ幅 ΔT が大きいほど、位相が 0、すなわち同期が達成されることがわかる。これは、広い分布を持つ場合、解軌道が一つに収束しやすくなることを示している。この結果は、先に得られた、図 16、図 17 と合致する。

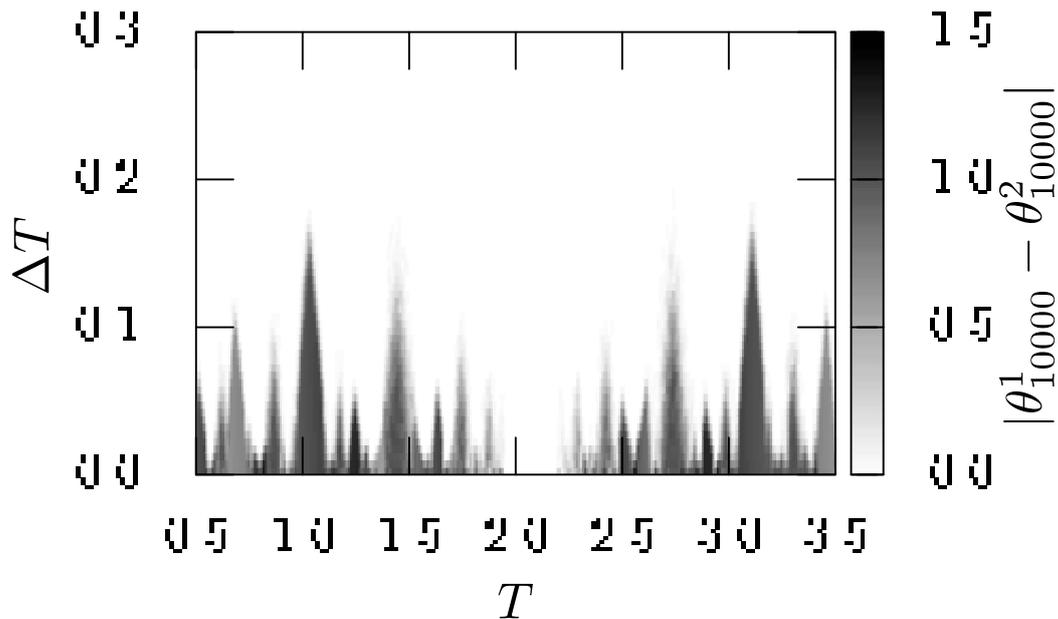


図 19 外力と位相差

6 まとめ

外力によりしきい値が駆動される弛張発振器を用いて同一の非周期パルスを入力した際の 2 個の発振器の同期を入力した場合の解析を厳密な random phase map を導出し行った。random phase map としきい値パラメータの関係に注目し、システムの振る舞いをしきい値で分類を行った。また、同期が達成されやすいしきい値パラメータの場合において、パルス幅が変化するような、周期外力に近い性質を持つ外力を与えた場合を検討した。結果、パルス幅の揺れ幅が大きいと、安定した完全同期が達成されやすいことを確認した。今後は、発振器の個体差が同期に与える影響について検討する。

【参考文献】

- [1] 田中久陽, 長谷川晃朗, 大場信義, “集団同期の密度効果 --東南アジアホテル Pt. tenar と Pt. valida の棲み分け仮説--,” 電子情報通信学会論文誌 A, vol. J84-A, no. 6, pp. 870-874, 2001.
- [2] 甲斐昌一, “4.植物のリズム形成と雑音誘起による同期現象(<小特集>カオスと同期現象の科学--プラズマ科学の新しい視点--),” プラズマ・核融合学会誌, vol. 88, no. 7, pp. 368-373, 2012.
- [3] W. Kurebayashi, K. Fujiwara, and T. Ikeguchi, “Colored noise induces synchronization of limit cycle oscillators,” Europhysics Letters 97, 50009, 2012.

- [4] 田口 浩, 神野 健哉, ``ヒステリシスネットの同期現象によるグラフ彩色問題の解法," 信学技報(非線形問題), NLP2003-15, 2003.
- [5] 関川 宗久, 木本 圭子, 河野 崇, 川上 博, 合原 一幸, ``光結合した方形波発振器を用いた同期現象," 信学技報(回路とシステム), CAS2011-45, 2011.
- [6] K. Kohari, T. Saito, and H. Kawakami, ``On a Hysteresis Oscillator Including Periodic Thresholds," IEICE Trans. Fundamentals, vol. E76-A, no. 12, pp. 2102-2107, 1993.
- [7] 栗原 拓哉, 神野 健哉, ``周期矩形波外力により駆動されるヒステリシス素子を持つ弛張発振器の一考察," 電子情報通信学会技術研究報告, NLP2013-167, 2014.
- [8] 栗原 拓哉, 神野 健哉, ``共通信号が注入される電子ホタルに見られる同期現象," 電子情報通信学会技術研究報告, NLP2014-133, 2015.
- [9] K. Nagai, H. Nakao and Y. Tsubo, ``Synchrony of neural Oscillators induced by random telegraphic currents," Phys. Rev. E71, 036217, 2005.
- [10] K. Nagai and H. Nakao, ``Experimental synchronization of circuit oscillations induced by common telegraph noise," Phys. Rev. E79, 036205, 2009.

〈発 表 資 料〉

題 名	掲載誌・学会名等	発表年月
Evaluation of Individual Differences in Injection Locking of Relaxation Oscillators	2015 International Conference on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2015)	2015 年 12 月
A study on the synchronization range expansion by non-periodic injection	2015 IEEE Workshop on Nonlinear Circuit Networks (NCN' 15)	2015 年 12 月
Synchronization of Relaxation Oscillators having Individual Difference by Non-periodic Signal Injection	IEICE Transaction on Fundamentals, vol. E99-A, no. 6	2016 年 6 月
非周期注入信号による弛張発振器の同期範囲の拡大	電子情報通信学会 和文論文誌 A, vol. J99-A, no. 8	2016 年 8 月 (掲載決定)